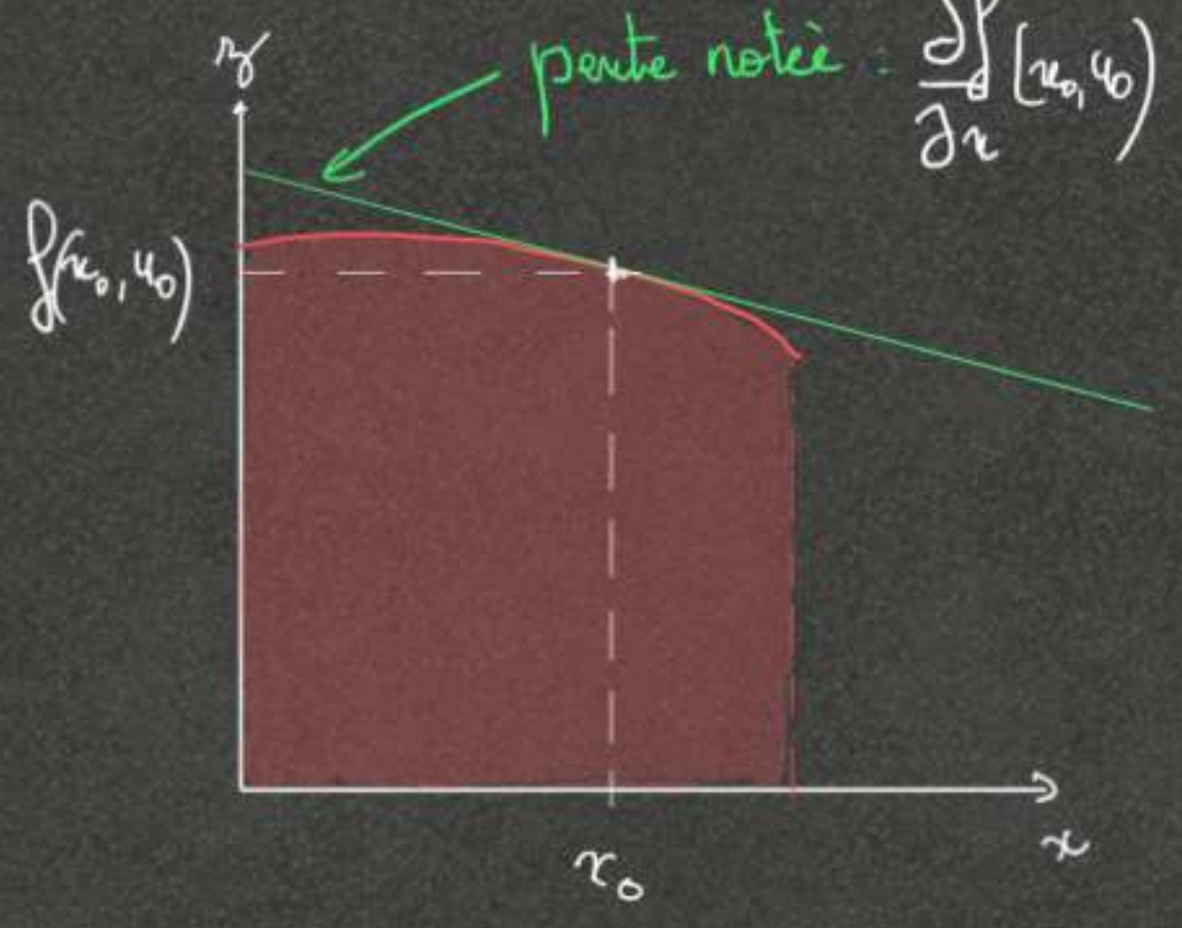
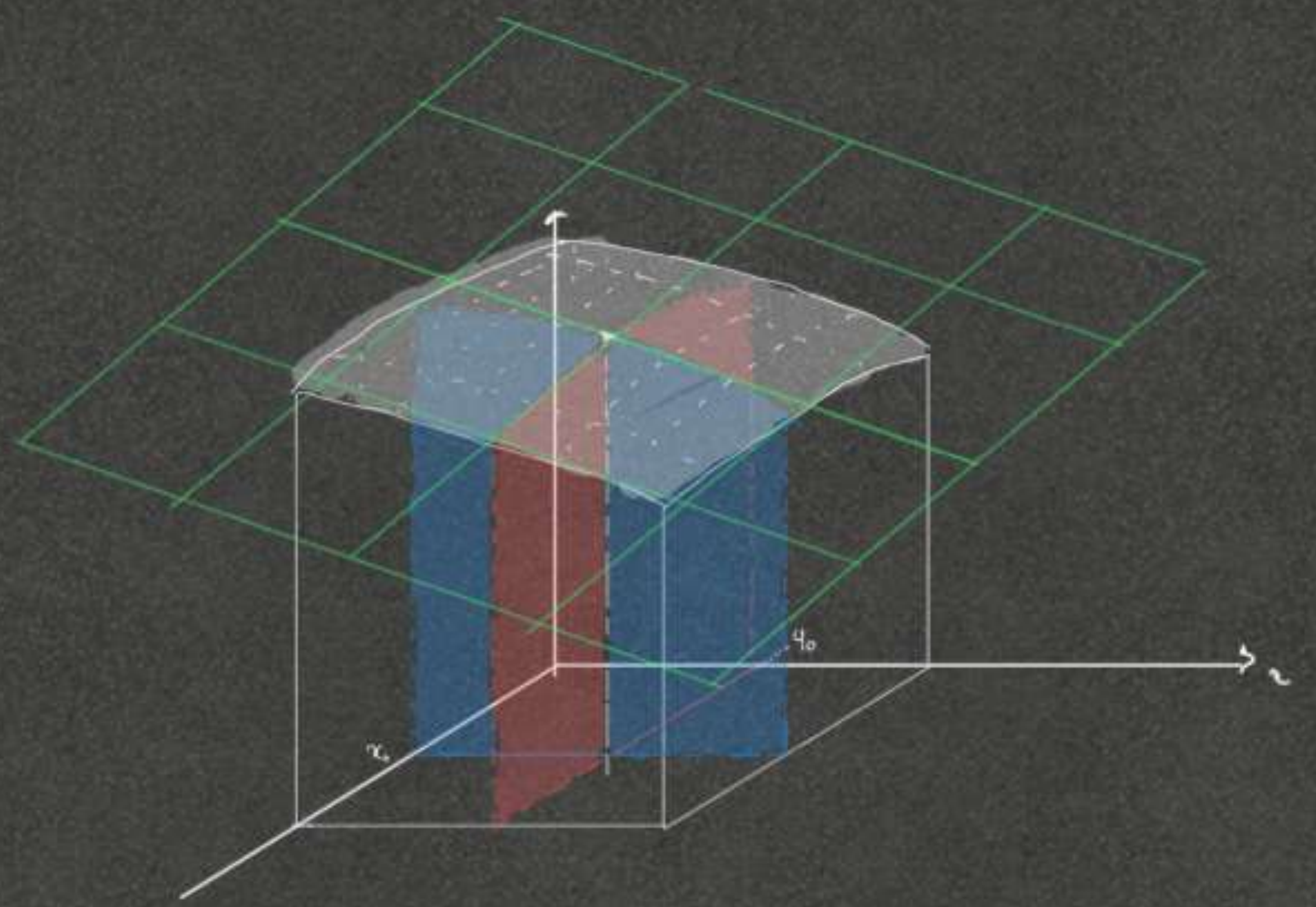
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

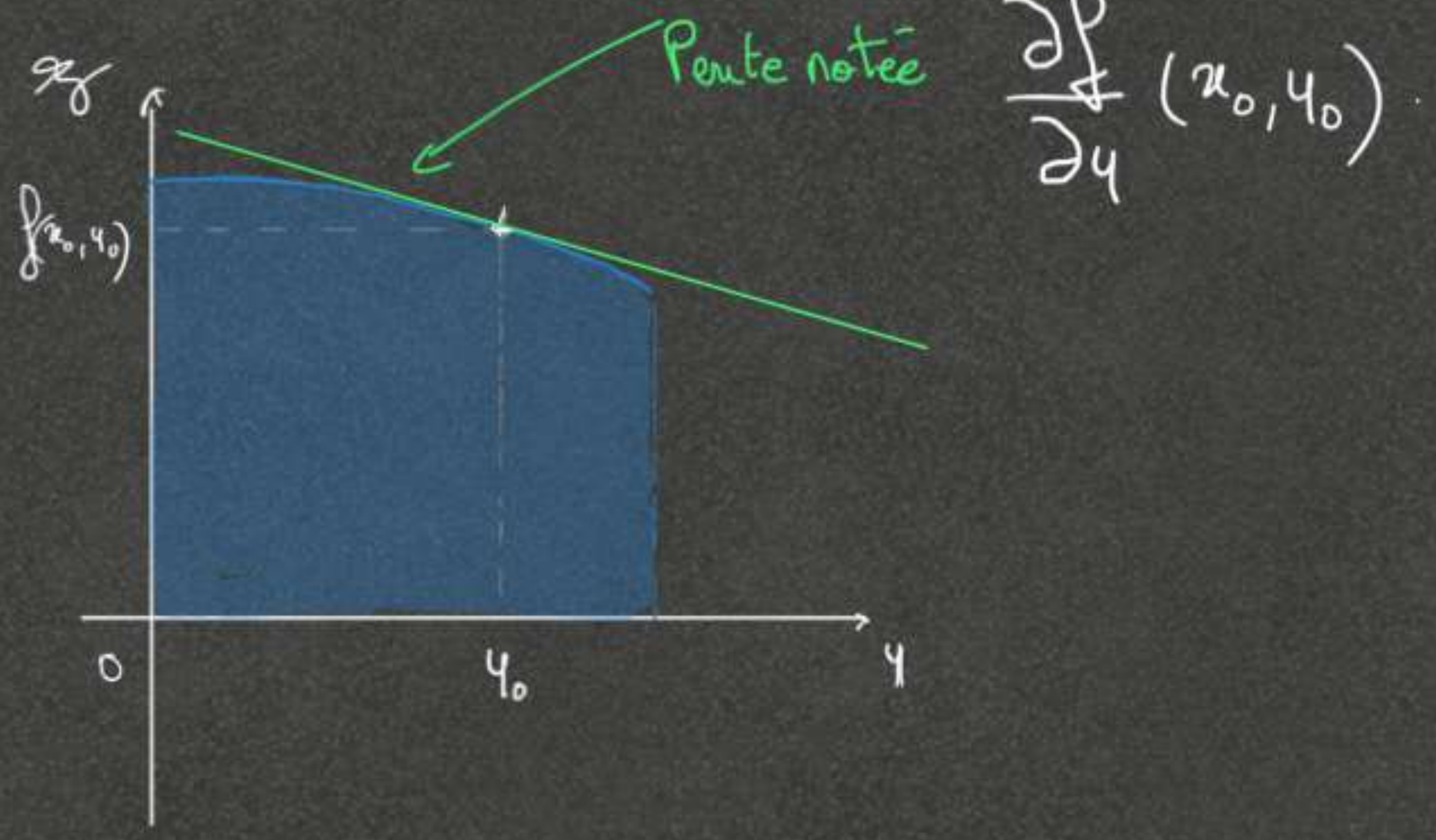
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

Dans le plan $y = y_0$.





Dans le plan $x = x_0$.



Quand $y = y_0$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)$$

Quand $x = x_0$:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \simeq \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

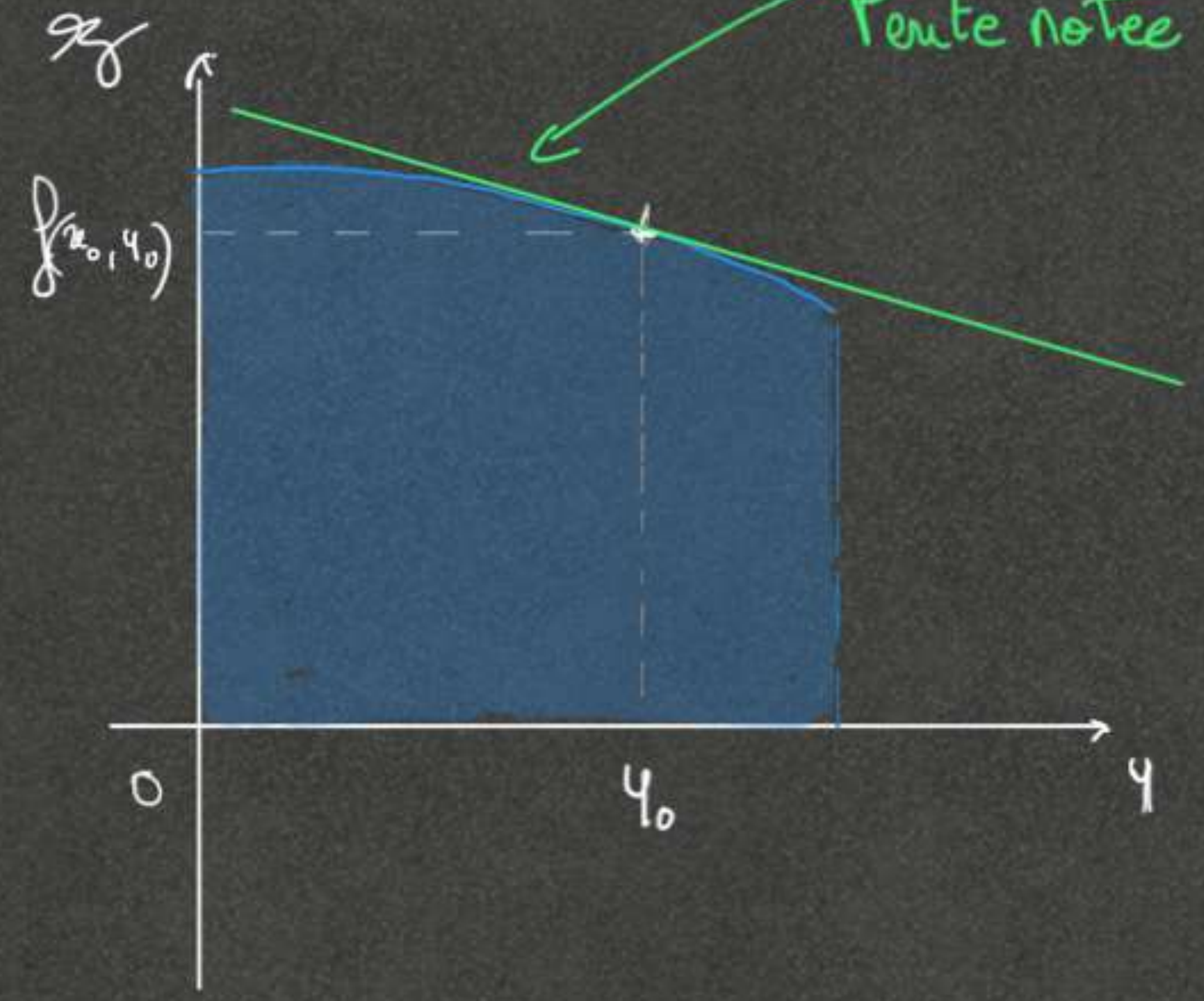
On peut montrer que lorsque $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ sont bien définies on a :

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon(h) \times h$$

où $h = \|(x-x_0, y-y_0)\|$

on fixe x.

Dans le plan $x = x_0$.



Pente notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

C'est la représentation de : fonction partielle

$$y \longmapsto f(x_0,y)$$

pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

on dérive l'expression $f(x,y)$ par rapport à y en considérant que x est une constante.

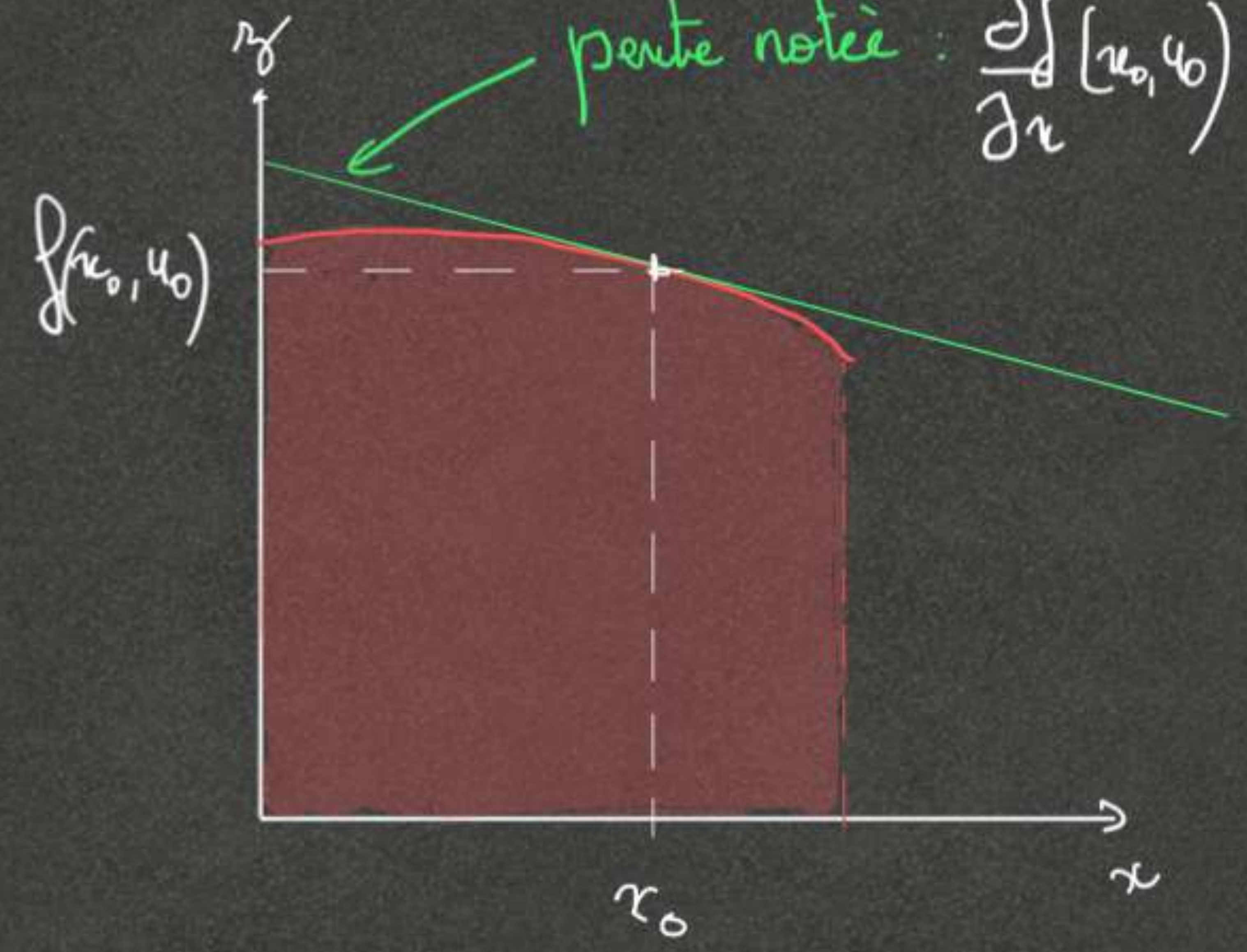
on retrouve :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

---

on fixe y.

Dans le plan $y = y_0$.



pente notée : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

C'est la représentation de :

$$x \longmapsto f(x,y_0)$$

pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

on dérive l'expression $f(x,y)$ par rapport à x en considérant que y est une constante.

on retrouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

Exemple :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto x^2 y + 3xy^3.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 3y^3.$$

la première variable de f

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 9xy^2.$$

la deuxième variable

Dérivées partielles d'ordre 2.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Exemple :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x^2 y + 3 x y^3 .$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 3y^3 .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 9xy^2 .$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x + 9y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 18xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x + 9y^2$$

$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$

- $g(t) = f(x(t))$

$$g'(t) = x'(t) \times f'(x(t))$$

Voir la démonstration dans le cours. On utilise le cours sur les DL.

$$g'(t) = (x'(t), y'(t)) \cdot \nabla f \circ (x,y)(t)$$

- $g(t) = f(x(t), y(t))$

$$\boxed{g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))}$$

$$\boxed{(f \circ (x,y))' = (x', y') \cdot \nabla f \circ (x,y)}$$

Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ $\quad x_1 x_2 + y_1 y_2$

$$g'(t) = (x'(t), y'(t)) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\right)}_{\text{Gradient de } f \text{ en } x(t), y(t)}$$