DEVOIR SURVEILLE

# MATHÉMATIQUES

Lundi 3 mars 2025

*(2 heures)*

**L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.**

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3 .

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

*Ce devoir comporte un exercice et un problème indépendants l'un de l'autre.*

---

## Exercice.

On considère l'expérience suivante : on effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. On suppose les lancers indépendants.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $F_n$ l'événement "au $n$-ème lancer on obtient un face"
On considère la variable aléatoire $T$ égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier face.

**1)** Déterminer la loi de $T$ et donner son espérance et sa variance.

**2)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(T > n)$.

**3)** Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^*$.
Comparer $P(T > n + m | T > n)$ et $P(T > m)$ *(Justification à faire)* et donner une interprétation.

On considère la variable aléatoire $S$ égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier double face, c'est-à-dire deux faces consécutifs. On a donc $S \geqslant 2$ et $S$ est égal à 3 si et seulement si on a obtenu un pile suivi de deux faces aux trois premiers lancers.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = P(S = n)$ et $q_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k$.

**4)** Déterminer $p_1$, $p_2$, $p_3$ et $p_4$ puis $q_1$, $q_2$, $q_3$ et $q_4$.

**5)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la probabilité de l'événement "$S > n$" en fonction de $q_n$.

**6)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \in [0, 1]$ puis que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

**7)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Prouver que $p_{n+3} = \dfrac{q_n}{8}$ puis que $q_{n+3} = q_{n+2} - \dfrac{q_n}{8}$.

**8)** En déduire la limite de la suite $(q_n)_{n \in N^*}$ et en donner une interprétation.

**9)** Démontrer que pour tout entier $n$ non nul, on a $q_{n+2} = \dfrac{q_{n+1}}{2} + \dfrac{q_n}{4}$.

**10)** Déterminer les racines du polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$.
On les notera $r_1$ et $r_2$ avec $r_1 < r_2$.

**11)** **a)** Justifier qu'il existe un unique couple $(A, B)$ tel que :

$$\begin{cases} A\,r_1 + B\,r_2 &= q_1 \\ A\,r_1^2 + B\,r_2^2 &= q_2 \end{cases}$$

**b)** Justifier que $B \neq 0$

On note $(A, B)$ la solution de ce système dans la suite de cet exercice.

**12)** Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $q_n = Ar_1^n + Br_2^n$.
*Indication : On pourra utiliser les relations* : $\frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{4} = r_1^2$ et $\frac{1}{2}r_2 + \frac{1}{4} = r_2^2$.

**13)** Donner un équivalent de $q_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
*Cet équivalent pourra faire intervenir $A$, $B$, $r_1$, $r_2$ et $n$.*

## Problème : Lois du Khi $_2$

### Partie A : Ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale.

Soit $\Gamma$ la fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par :

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

**14)** **a)** Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

**b)** Pour $x$ un réel quelconque, calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x+1}$ et en déduire qu'il existe $T \in [1, +\infty[$ tel que :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad t \geqslant T \Longrightarrow \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

**c)** Pour quelles valeurs de $x$, $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

**15)** **a)** Démontrer que $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

**b)** En déduire que $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

**16)** Déduire des questions précédentes l'ensemble de définition de $\Gamma$.

### Partie B : Quelques propriétés de cette fonction.

**17)** **a)** Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) > 0$.

**b)** Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

**c)** En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur $n$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

**18)** On admet que $\Gamma$ a une limite en 1, en $0^+$ et en $+\infty$. Déterminer ces trois limites.

**19)** **a)** Rappeler la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

**b)** À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{2t}$, démontrer que : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

**c)** En déduire enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ à l'aide de factorielles.

**Partie C : Les lois du Khi$_2$.**

Pour tout $k$ un entier naturel non nul, on dit qu'une variable aléatoire $X$ suit la loi du Khi$_2$ à $k$ degrés de liberté lorsqu'il existe $a_k \in \mathbb{R}$ tel que $X$ admet pour densité la fonction $f_k$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_-,\ f_k(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_k(t) = a_k\, e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{k}{2}-1}$$

Autrement dit : $\quad f_k : t \longmapsto a_k\, e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{k}{2}-1}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$

*où $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}_-,\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t) = 1$*

**20)** Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$.

**21)** Reconnaître la loi du Khi$_2$ à deux degrés de liberté.

**22)** Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$, montrer que $X^2$ suit la loi du Khi$_2$ à un degré de liberté.

*Autrement dit : $X^2$ de densité $f_1$.*

**23)** *Le but de cette question est de montrer la stabilité pour la somme des lois du Khi$_2$.*

**a)** Montrer que pour tout $k_1$ et $k_2$ dans $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{k_1}{2}-1}(1-t)^{\frac{k_2}{2}-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

*On pourra utiliser le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$.*

**b)** Montrer que $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_0^x t^{\frac{k_1}{2}-1}(x-t)^{\frac{k_2}{2}-1}\,\mathrm{d}t = x^{\frac{k_1+k_2}{2}-1}\int_0^1 t^{\frac{k_1}{2}-1}(1-t)^{\frac{k_2}{2}-1}\,\mathrm{d}t$$

*On pourra utiliser le changement de variable $t = xu$.*

**c)** Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ *(sauf peut-être en un nombre fini de points),*

Montrer que : si $x < 0$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-t)\,\mathrm{d}t = 0$

sinon $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

**d)** Soient $k_1$ et $k_2$ deux entiers naturels non nuls, $X_1$ une variable aléatoire suivant une loi du Khi$_2$ à $k_1$ degrés de liberté et $X_2$ suivant une loi du Khi$_2$ à $k_2$ degrés de liberté, on suppose que $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et on note $Y = X_1 + X_2$.

On admet que la fonction $h : x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{k_1}(t) f_{k_2}(x-t)\,\mathrm{d}t$ est une densité de $Y$.

Montrer que $Y$ suit une loi du Khi$_2$ dont on déterminera le nombre de degrés de liberté.

**24)** Soient $X_1, \dots, X_k$ $k$ variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{N}(0,1)$,

montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i^2$ suit la loi du Khi$_2$ à $k$ degré de liberté.

**25)** Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi du Khi$_2$ à $k$ degrés de liberté,

Calculer l'espérance et la variance de $X$.

FIN DU SUJET