Correction du concours blanc du lundi 3 mars 2025.

Exercice.

1. Cette expérience est la succession *(d'un nombre indéfini)* d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Le succès est "obtenir face" a pour probabilité $\dfrac{1}{2}$ *(car la pièce est équilibrée)*
T est le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier succès, donc

$$\boxed{T \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{1}{2}}$$

On connait l'espérance et la variance de cette loi usuelle : $E(T) = \dfrac{1}{p}$ et $V(T) = \dfrac{q}{p^2}$

$$\boxed{E(T) = 2 \text{ et } V(T) = 2}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P\Big(X > n\Big) &= 1 - P\Big(X \leqslant n\Big) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{n} P\Big(X = i\Big) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{i-1}} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad P\Big(X > n\Big) = \frac{1}{2^n}}$$

Remarque : Il y a plus efficace en remarquant que : $\quad (X > n) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \overline{F_k}$

3. Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P\Big(X > n+m \,\Big|\, X > n\Big) = \frac{P\Big((X > n+m) \cap (X > n)\Big)}{P\Big(X > n\Big)}$$

or $\quad m \geqslant 0 \quad$ donc $[X > n+m] \subset [X > n] \quad$ et ainsi $[X > n+m] \cap [X > n] = [X > n+m]$ et

$$P\Big([X > n+m] \,\Big|\, [X > n]\Big) = \frac{P\Big([X > n+m]\Big)}{P\Big([X > n]\Big)}$$

donc $P\Big([X > n]\Big) = q^n$ et $P\Big([X > n+m]\Big) = q^{n+m}$, donc $\quad P\Big([X > n+m] \,\Big|\, [X > n]\Big) = q^m$,

En conclusion on a bien :

$$\boxed{\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad P\Big([X > n+m] \,\Big|\, [X > n]\Big) = P(\,[X > m]\,)}$$

La loi géométrique est une loi sans mémoire :
Si on a observé que des échecs au cours des n premiers lancers, la loi du temps d'attente du premier succès est la même qu'au début de l'expérience.

4. $(S=1)$ est impossible, $\boxed{p_1=0}$

$(S=2)=F_1\cap F_2$ et les lancers sont indépendants donc $P(S=2)=P(F_1)P(F_2)$ d'où $\boxed{p_2=\dfrac{1}{4}}$

$(S=3)=\overline{F}_1\cap F_2\cap F_3$ et les lancers sont indépendants donc $\boxed{p_3=\dfrac{1}{8}}$

$(S=4)=\left(F_1\cap\overline{F}_2\cap F_3\cap F_4\right)\cup\left(\overline{F}_1\cap\overline{F}_2\cap F_3\cap F_4\right)$ et ces deux événements sont incompatibles donc

$$\begin{aligned} P(S=4) &= P\left(F_1\cap\overline{F}_2\cap F_3\cap F_4\right)+P\left(\overline{F}_1\cap\overline{F}_2\cap F_3\cap F_4\right)\\ &= \frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4} \qquad \textit{(indépendance)} \end{aligned}$$

$$\boxed{p_4=\frac{1}{8}}$$

$q_1=1-p_1,\quad q_2=1-p_1-p_2,\quad q_3=1-p_1-p_2-p_3\quad$ et $\quad q_4=1-p_1-p_2-p_3-p_4$

$$\boxed{q_1=1,\quad q_2=\frac{3}{4},\quad q_3=\frac{5}{8}\quad \text{et}\quad q_4=\frac{1}{2}}$$

5.

$$\begin{aligned} P(S>n) &= 1-P(S\leqslant n)\\ &= 1-\sum_{k=1}^{n}P(S=k)\\ &= 1-\sum_{k=1}^{n}p_k \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\quad P(S>n)=q_n}$$

6. On vient de montrer que $q_n=P(S>n)$, or $P(\cdot)$ est à valeurs dans $[0,1]$ donc

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\quad q_n\in[0,1]}$$

$(S>n+1)\subset(S>n)$ donc $P(S>n+1)\leqslant P(S>n)$ et ainsi la suite (q_n) est décroissante.

On vient de montrer que (q_n) est décroissante et minorée par 0, donc

$$\boxed{\text{la suite } (q_n) \text{ est convergente}}$$

7. $(S=n+3)=(S>n)\cap\left(\overline{F}_{n+1}\cap F_{n+2}\cap F_{n+3}\right)$

(on n'a jamais vu deux Faces consécutifs jusqu'à n et ensuite on a Pile-Face-Face).

Les lancers sont indépendants donc : $P(S=n+3)=P(S>n)\cdot P\left(\overline{F_{n+1}}\right)\cdot P(F_{n+2})\cdot P(F_{n+3})$

ce qui donne $\boxed{p_{n+3}=\dfrac{q_n}{8}}$

$q_{n+3}-q_{n+2}=1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n+3}p_k-1+\sum_{k=1}^{n+2}p_k$ donc $q_{n+3}-q_{n+2}=-p_{n+3}$ ce qui entraîne : $\boxed{q_{n+3}=q_{n+2}-\dfrac{q_n}{8}}$

8. (q_n) converge vers un réel $\ell\in[0,1]$ d'après la question 6).

de plus $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad q_{n+3}=q_{n+2}-\dfrac{q_n}{8}$ donc en passant à la limite on obtient :

$\ell=\ell-\dfrac{\ell}{8}$ ce qui est équivalent à $\ell=0$.

$$\boxed{\text{La suite } (q_n) \text{ converge vers } 0}$$

Interprétation : (Ici il y a une difficulté non prévu par le rédacteur, S est-elle une variable aléatoire ?)

Le rédacteur accepte l'événement $(S=+\infty)$ *(il suffit de lire le rapport du concours)* ce qu'on fait pas en BCPST.

On note $D=(S=+\infty)$: "on obtient jamais deux Faces consécutifs"

pour tout $n\in\mathbb{N},\quad D\subset(S>n)$ donc $0\leqslant P(D)\leqslant P(S>n)$ et en passant à la limite, il vient $P(D)=0$

autrement dit :

$$\boxed{\text{On est quasi-certain d'obtenir au moins une fois deux Faces consécutifs.}}$$

9. **Première approche** : *"On conditionne par ce qui se passe au début".*
On applique la formule des probabilités totales avec système complet d'événements : $(\overline{F}_1\,,\,F_1\cap\overline{F}_2\,,\,F_1\cap F_2)$,

$$P(S>n+2)=P(\overline{F}_1)P_{\overline{F}_1}(S>n+2)+P(F_1\cap\overline{F}_2)P_{F_1\cap\overline{F}_2}(S>n+2)+P(F_1\cap F_2)P_{F_1\cap F_2}(S>n+2)$$

Etudions ces trois probabilités conditionnelles :
- sachant $\overline{F}_1$, après un lancer on se retrouve dans la situation du début donc : $P_{\overline{F}_1}(S>n+2)=P(S>n+1)$
- sachant $F_1\cap\overline{F}_2$, après deux lancers on se retrouve dans la situation du début donc :

$$P_{F_1\cap\overline{F}_2}(S>n+2)=P(S>n)$$

- sachant $F_1\cap F_2$, on a eu deux faces dès le début donc $(S>n+2)$ est impossible : $P_{F_1\cap F_2}(S>n+2)=0$

on sait de plus que $P(\overline{F}_1)=\dfrac{1}{2}$ et $P(F_1\cap\overline{F}_2)=\dfrac{1}{4}$, ce qui donne en conclusion :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad q_{n+2}=\frac{q_{n+1}}{2}+\frac{q_n}{4}}$$

Deuxième approche : *Une récurrence simple fonctionnait bien ici.*
Montrons par récurrence simple sur n que : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $q_{n+2}=\dfrac{q_{n+1}}{2}+\dfrac{q_n}{4}$

- Pour $n=1$,
  D'une part $q_3=\dfrac{5}{8}$ et d'autre part $\dfrac{q_2}{2}+\dfrac{q_1}{4}=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{8}$, la relation est bien vérifiée pour $n=1$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $q_{n+2}=\dfrac{q_{n+1}}{2}+\dfrac{q_n}{4}$,
  $q_{n+2}=\dfrac{q_{n+1}}{2}+\dfrac{q_n}{4}$ et on a vu que : $q_{n+3}=q_{n+2}-\dfrac{q_n}{8}$ donc $q_{n+2}=\dfrac{q_{n+1}}{2}+2(q_{n+2}-q_{n+3})$.
  cela entraine la relation attendue : $q_{n+3}=\dfrac{q_{n+2}}{2}+\dfrac{q_{n+1}}{4}$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad q_{n+2}=\frac{q_{n+1}}{2}+\frac{q_n}{4}}$$

10. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta=\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{5}{4}$ donc

$$\boxed{\text{Les racines de } X^2-X-\frac{1}{4} \text{ sont } r_1=\frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } r_2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

11. **(a)** Ce système d'inconnues (A,B) a pour déterminant : $r_1r_2^2-r_2r_1^2=r_1r_2(r_2-r_1)\neq 0$ donc

$$\boxed{\text{il existe un unique couple } (A,B) \text{ tel que : } \begin{cases} Ar_1+Br_2=q_1\\ Ar_1^2+Br_2^2=q_2\end{cases}}$$

(b) Montrons par l'absurde que $B\neq 0$ en supposant $B=0$,
on aurait alors $\begin{cases} Ar_1=q_1\\ Ar_1^2=q_2\end{cases}$ qui entraîne $q_2=r_1q_1$ puis $q_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ ce qui est faux donc $\boxed{B\neq 0}$

12. Montrons par récurrence d'ordre 2 sur n que : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $q_n=Ar_1^n+Br_2^n$

- Pour $n=1$ et $n=2$,
  A et B ont justement été choisis à la question **11.** pour avoir : $q_1=Ar_1^1+Br_2^1$ et $q_2=Ar_1^2+Br_2^2$
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $q_n=Ar_1^n+Br_2^n$ et $q_{n+1}=Ar_1^{n+1}+Br_2^{n+1}$,

$$\begin{aligned}
q_{n+2} &= \frac{q_{n+1}}{2}+\frac{q_n}{4} && \textit{(d'après le résultat de la question 9.)}\\
&= \frac{1}{2}(Ar_1^{n+1}+Br_2^{n+1})+\frac{1}{4}(Ar_1^n+Br_2^n) && \textit{(avec l'hypothèse de récurrence)}\\
&= Ar_1^n\left(\frac{1}{2}r_1+\frac{1}{4}\right)+Br_2^n\left(\frac{1}{2}r_2+\frac{1}{4}\right)\\
&= Ar_1^n\cdot r_1^2+Br_2^n\cdot r_2^2 && \textit{(Ce sont des racines du polynôme : } X^2-\tfrac{1}{2}X-\tfrac{1}{4})\\
q_{n+2} &= Ar_1^{n+2}+Br_2^{n+2} && \textit{(On obtient la propriété au rang } n+2)
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = Ar_1^n + Br_2^n}$$

13. *(on a montré à la question 11)b) que $B \neq 0$)*

$$q_n = Br_2^n \left(1 + \frac{A}{B}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right)$$

or $\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} < 1$ donc

$$\boxed{q_n \underset{n \to +\infty}{\sim} B\, {r_2}^n}$$

Comme $|r_2| < 1$, on retrouve que (q_n) converge vers 0.

Problème.

Partie A : Ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale.

14. **(a)** $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$

de plus $F : t \longmapsto -\dfrac{1}{t}$ est une primitive de f sur $[1, +\infty[$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 0$ $(\in \mathbb{R})$ donc

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t \text{ converge}}$$

(b) $\mathrm{e}^{-t} t^{x+1} = \dfrac{t^{x+1}}{e^t}$ or on sait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^\alpha}{e^t} = 0$

(en particulier quand $\alpha > 0$ c'est une croissance comparée)

donc

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, \ \lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x+1} = 0}$$

En utilisant la définition de cette limite, on sait qu'il existe $T \in [1, +\infty[$ tel que : $\forall t \geqslant T$, $\mathrm{e}^{-t} t^{x+1} \leqslant 1$ on en déduit que :

$$\boxed{\text{il existe } T \in [1, +\infty[\text{ tel que : } \quad \forall t \geqslant T, \quad \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leqslant \frac{1}{t^2}}$$

T désigne un tel réel dans la question suivante.

(c) Pour x un réel quelconque,

la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $[1; +\infty[$,

l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$ il suffit d'étudier la convergence de $\displaystyle\int_T^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$

on sait d'une part que : $\forall t > T$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ (d'après 14)b))

et d'autre part que $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge (d'après 14)a))

donc *(en appliquant le théorème de convergence par comparaison des intégrandes positifs ou nuls)*,

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, \quad \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t \text{ est convergente}}$$

15. **(a)** *(Question classique sur les intégrales de Riemann, qu'il faut toujours adapter)*

- Si $x = 0$, $t \longmapsto \ln(t)$ est une primitive de $t \longmapsto t^{-1}$ et $\lim\limits_{0} \ln(t) = -\infty$ donc $\displaystyle\int_0^1 t^{-1}\ \mathrm{d}t$ diverge
- Si $x < 0$, $t \longmapsto \dfrac{1}{x}t^x$ est une primitive de $t \longmapsto t^{x-1}$ et $\lim\limits_{0} t^x = +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ diverge
- Si $x > 0$, $t \longmapsto \dfrac{1}{x}t^x$ est une primitive de $t \longmapsto t^{x-1}$ et $\lim\limits_{0} t^x = 0\ \ (\in \mathbb{R}\ )$ donc $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ converge

En conclusion :

$$\boxed{\int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{d}t \text{ converge si, et seulement si, } x > 0}$$

(b) $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$, $\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et $t^{x-1} \geqslant 0$ sur $]0,1]$

donc *(en appliquant le théorème de convergence par équivalence des intégrandes positifs ou nuls)*,

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t \text{ converge si, et seulement si, } \int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{d}t \text{ converge}$$

ainsi en utilisant le résultat de 15)a) :

$$\boxed{\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t \text{ converge si, et seulement si, } x > 0}$$

16. Un réel x appartient à l'ensemble de définition de Γ si, et seulement si, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ convergent ; donc les questions précédentes permettent de conclure :

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } \Gamma \text{ est }]0,+\infty[}$$

Partie B : Quelques propriétés de cette fonction.

17. **(a)** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$f : t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ continue sur $]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ converge et $\forall t \in]0,+\infty[, f(t) > 0$

donc *(stricte positivité)* : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t > 0$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) > 0}$$

(b) Soit a et b deux réels de $]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{e}^{-t}t^x\ \mathrm{d}t &= \Big[-\mathrm{e}^{-t}t^x\Big]_a^b - \int_a^b (-\mathrm{e}^{-t})(xt^{x-1})\ \mathrm{d}t \qquad \textit{(Intégration par parties)}\\
&= \Big[-\mathrm{e}^{-t}t^x\Big]_a^b + x\int_a^b \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

en faisant tendre a vers 0 puis b vers $+\infty$ on obtient bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

(c) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

- Pour $n = 1$, d'une part : $(1-1)! = 0! = 1$

  d'autre part : $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = 1$ *(densité de la loi exponentielle)*

  La propriété est vraie pour $n = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Gamma(n) = (n-1)!$,

  on sait d'après 17)b) que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ ce qui donne avec l'hypothèse de récurrence $\Gamma(n+1) = n!$,

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!}$$

18. • $\Gamma(1)=1$ (d'après 17)c)) et on a admis que Γ a une limite en 1 donc $\boxed{\lim\limits_{1}\Gamma=1}$

• $\lim\limits_{n\to+\infty}\Gamma(n)=+\infty$ (d'après 17)c)) et on a admis que Γ a une limite en $+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty}\Gamma=+\infty}$

• $\forall x>0,\ \Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{0^+}\Gamma=+\infty}$

19. **(a)** Connaissant la densité de la loi $\mathscr{N}(0,1)$ on sait que $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}}$ et comme l'intégrande est pair il vient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

(b) La fonction $\varphi : t\longmapsto\sqrt{2t}$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ en faisant le changement de variable $x=\sqrt{2t}$ on a :

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{\sqrt{2t}}\,\mathrm{d}t \text{ sont de même nature et égales en cas de convergence,}$$

en utilisant le résultat de 19.a) il vient

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}}$$

(c) *Pour ceux qui n'ont pas le temps de rédiger la récurrence :*

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\times\left(\frac{2n-3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\
&\ \vdots\\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\times\left(\frac{2n-3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{2n}{2n}\times\frac{2n-1}{2}\times\frac{2n-2}{2(n-1)}\times\frac{2n-3}{2}\times\cdots\times\frac{2}{2\times 1}\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Donc *(en toute rigueur il faudrait un raisonnement par récurrence)*

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}\times n!}\sqrt{\pi}}$$

Partie C : Les lois du Khi$_2$.

20. L'énoncé nous dit que f_k est une densité de probabilité donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_k(t)\,\mathrm{d}t=1$ d'où

$$a_k\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t}{2}}\,t^{\frac{k}{2}-1}\,\mathrm{d}t=1$$

or en faisant le changement de variable affine $x=\dfrac{t}{2}$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t}{2}}\,t^{\frac{k}{2}-1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty}e^{-x}\,(2x)^{\frac{k}{2}-1}\,2\,\mathrm{d}x\\
&= 2^{\frac{k}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-x}\,x^{\frac{k}{2}-1}\,\mathrm{d}x\\
&= 2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ a_k=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}}$$

21. $a_2 = \dfrac{1}{2\Gamma(1)} = \dfrac{1}{2}$ donc $f_2 : t \longmapsto \dfrac{1}{2}\, e^{-\frac{t}{2}}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La loi du Khi}_2 \text{ à deux degrés de liberté est la loi exponentielle de paramètre } \frac{1}{2}}$$

22. $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc X^2 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} F_{X^2}(x) &= P(X^2 \leqslant x) \\ &= P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) \\ &= 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 \qquad \textit{(En notant } \Phi \textit{ la fonction de répartition de la loi } \mathscr{N}(0,1)\textit{)} \end{aligned}$$

La fonction de répartition de X^2 est donc $x \longmapsto (2\Phi(\sqrt{x}) - 1).\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$

Φ est de classe C^∞ et $\Phi\left(\dfrac{1}{2}\right)$ donc F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, donc

X^2 est une variable à densité et X^2 est de densité $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}\Phi'(\sqrt{t}).\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$

ou encore X^2 de densité $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t}{2}}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$ on reconnait f_1 *(En effet :* $\dfrac{1}{\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} = \dfrac{t^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$ *)*

$$\boxed{\text{Si } X \text{ suit la loi } \mathscr{N}(0,1) \text{ alors } X^2 \text{ suit la loi Khi}_2 \text{ à 1 degré de liberté}}$$

23. **(a)** La fonction $\varphi : \theta \longmapsto \sin^2(\theta)$ est C^1 et strictement croissante sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc en faisant le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$ on obtient :

$\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{k_1}{2}-1}(1-t)^{\frac{k_2}{2}-1}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{k_1-2}(1-\sin^2(\theta))^{\frac{k_2}{2}-1}\, 2\cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta$ sont de même nature.

or $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{k_1-2}(1-\sin^2(\theta))^{\frac{k_2}{2}-1}\, 2\cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{k_1-1}\cos(\theta)^{k_2-1}\,\mathrm{d}\theta$ qui est convergente

En effet : $k_1 \geqslant 1$ *et* $k_2 \geqslant 1$.

donc

$$\boxed{\int_0^1 t^{\frac{k_1}{2}-1}(1-t)^{\frac{k_2}{2}-1}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$$

(b) Avec le changement de variable $t = xu$ *(Les intégrales convergent).*

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{\frac{k_1}{2}-1}(x-t)^{\frac{k_2}{2}-1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (xu)^{\frac{k_1}{2}-1}(x-xu)^{\frac{k_2}{2}-1}\,x\mathrm{d}u \\ &= x^{\frac{k_1+k_2}{2}-1}\int_0^1 u^{\frac{k_1}{2}-1}(1-u)^{\frac{k_2}{2}-1}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^x t^{\frac{k_1}{2}-1}(x-t)^{\frac{k_2}{2}-1}\,\mathrm{d}t = x^{\frac{k_1+k_2}{2}-1}\int_0^1 t^{\frac{k_1}{2}-1}(1-t)^{\frac{k_2}{2}-1}\,\mathrm{d}t}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\mathbb{1}_{t>0}\mathbb{1}_{t<x}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\mathbb{1}_{0<t<x}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x).\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{k_1}(t) f_{k_2}(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= a_{k_1}a_{k_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{k_1}{2}-1}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t) e^{-\frac{x-t}{2}} (x-t)^{\frac{k_2}{2}-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= a_{k_1}a_{k_2}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x).e^{-\frac{x}{2}} \int_0^x t^{\frac{k_1}{2}-1}(x-t)^{\frac{k_2}{2}-1}\,\mathrm{d}t \\
&= a_{k_1}a_{k_2}.\ x^{\frac{k_1+k_2}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}} \int_0^1 t^{\frac{k_1}{2}-1}(1-t)^{\frac{k_2}{2}-1}\,\mathrm{d}t.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)
\end{aligned}$$

donc il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que h est la fonction $t \longmapsto a\ e^{-\frac{t}{2}}\ t^{\frac{k_1+k_2}{2}-1}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$
et comme on a admis que h est la densité de Y, on peut conclure que :

$$\boxed{Y = X_1 + X_2 \text{ suit la loi du Khi}_2 \text{ à } k_1 + k_2 \text{ degrés de liberté.}}$$

24. On considére (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{N}(0,1)$,

Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i^2$ suit la loi du Khi$_2$ à k degré de liberté.

- Pour $k = 1$,

  $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} X_1^2 = X_1^2$ et d'après 22), comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors X_1^2 suit la loi du Khi$_2$ à 1 degré de liberté.

  La propriété est vraie pour $k = 1$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i^2$ suit la loi du Khi$_2$ à k degré de liberté,

  $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i^2$ suit la loi du Khi$_2$ à k degré de liberté , X_{k+1}^2 suit la loi du Khi$_2$ à 1 degré de liberté
  et ces deux variables sont indépendantes *(Lemme de coalition)*
  donc d'après la question 23) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} X_i^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 + X_{k+1}^2$ suit la loi du Khi$_2$ à $k+1$ degré de liberté

En conclusion :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \text{ suit la loi du Khi}_2 \text{ à } k \text{ degré de liberté}}$$

25. L'espérance et la variance de X sont les mêmes que celles d'une somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i^2$ où les $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

On en déduit *(par linéarité)* que X admet une espérance et $\boxed{E(X) = k}$ *(En effet : $E(X_i^2) = V(X_i) = 1$)*

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{+\infty} t^2 f_k(t)\,\mathrm{d}t && \textit{(en cas de convergence)} \\
&= \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{k}{2}+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \times 2^{\frac{k}{2}+2} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{k}{2}+1}\,\mathrm{d}x && (t = 2x) \\
&= \frac{4 \times \Gamma\left(\frac{k}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} && \textit{(Ici on prouve la convergence)} \\
&= (k+2)k
\end{aligned}$$

donc *(Kœnig-Huygens)* X admet une variance et

$$\boxed{V(X) = 2k}$$