Feuille Cours_10_ter : Lois normales.

Pré-requis de cette feuille : Cours sur la loi normale centrée réduite.

Définition. *(X suit la loi normale d'espérance μ et de variance σ^2)*

Ex 1 : *(Etude de la densité)*

Soient σ un réel strictement positif et μ un réel quelconque.

On note : $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ et $f_0 : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

1) Exprimer, pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$ avec la fonction f_0.
2) Donner le tableau de variations de f et l'allure de la courbe représentative de f.
3) Montrer que f est une densité de probabilité.

Théorème. *(Lien entre la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et la loi $\mathcal{N}(0,1)$)*

Ex 2 : *(Démonstration du théorème)*

Soient X une variable aléatoire, σ un réel strictement positif et μ un réel quelconque.

1) On suppose que $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
   Indication : Exprimer la fonction de répartition de X en fonction de Φ.
2) On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, montrer que $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
   Indication : Déterminer la fonction de répartition de X^*.

Ex 3 : *(Utilisation de la calculatrice ou de la table de loi $\mathcal{N}(0,1)$)*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 12 et de variance 4, calculer une valeur approchée de la probabilité de chacun des événements suivants :

$$(X \leqslant 13) \qquad (11 \leqslant X \leqslant 14)$$

Théorème. *(Espérance et variance)*

Ex 4 : *(Les démonstrations peuvent être rapides si on ne part pas sans réfléchir dans la mauvaise direction)*

1) Démontrer ces deux résultats.
2) Que vaut $E(X^2)$?

Théorème. (Stabilité des lois normales par transformation affine.)

Ex 5 : *(Démonstration du théorème)*

Soient X une variable aléatoire, σ un réel strictement positif, μ un réel quelconque et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $(a \neq 0)$

On note : $Y = aX + b$ et on suppose que X admet une espérance μ et une variance σ^2.

1) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.
2) Exprimer Y^* la variable centrée réduite associée à Y en fonction de X^*.
3) On suppose que X suit la loi $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
   a. si $a > 0$. Montrer Y suit la loi $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ si, et seulement si, X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
   b. si $a < 0$. Montrer Y suit la loi $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ si, et seulement si, X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Théorème. (Stabilité des gaussiennes indépendantes par combinaisons linéaires)

Ex 6 : 1) Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et que X_1 et X_2 sont indépendantes.
   a. Justifier que pour tout réel α_1, $\alpha_1 X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}\big(\alpha_1\mu_1, (\alpha_1\sigma_1)^2\big)$
   b. Déterminer pour tous réels α_1, α_2, l'espérance et la variance de $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$
   c. Que reste-t-il à prouver pour démontrer le théorème ?

2) Enoncer la généralisation de ce théorème à n gaussiennes indépendantes.

Ex 7 : *Le but de cet exercice est de démontrer la stabilité des lois normales.*

1) Soient σ un réel strictement positif et
   X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :
$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$
   a. Quelle est la loi de $X + Y$? *(en utilisant le théorème).*
   b. On fixe x dans $\mathbb{R}$, quelle est la forme canonique du polynôme $t \longmapsto \dfrac{t^2}{\sigma^2} + (x - t)^2$?
   Indication : La réponse est : $\dfrac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2}\left(t - \dfrac{x\sigma^2}{1 + \sigma^2}\right)^2 + \dfrac{x^2}{1 + \sigma^2}$.
   c. Démontrer la réponse de la question 1)a. par le calcul.

On admet que $X + Y$ est de densité $h : x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x - t)\, dt$ où f et g sont des densités respectives de X et Y.

2) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, σ_1, σ_2 deux réels strictement positifs et μ_1, μ_2 deux réels quelconques.
   On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et que X_1 et X_2 sont indépendantes.
   On note $Y_1 = \dfrac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}$ et $Y_2 = \dfrac{X_2 - \mu_2}{\sigma_1}$ *(sic)*[1]
   a. Donner la loi de Y_1 et de Y_2.
   b. En déduire avec ce qui a été démontré en 1) la loi de $Y_1 + Y_2$.
   c. Exprimer $X_1 + X_2$ en fonction de $Y_1 + Y_2$ et des réels $\sigma_1, \sigma_2, \mu_1$, μ_2.
   d. Conclure.

1. c'est bien σ_1 dans la définition de Y_2