Feuille Exo_22 : Lois normales.

Ex 1 : *(Dans ces questions on utilisera la calculatrice ou de la table donnant la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$)*

1) X suit une loi $\mathcal{N}(18,9)$ *(9 est la variance de X)*, calculer une valeur approchée de la probabilité de chacun des événements suivants :

$$(X \leqslant 21) \qquad (X \geqslant 16) \qquad (20 \leqslant X \leqslant 24) \qquad (14 \leqslant X \leqslant 17)$$

2) X suit une loi $\mathcal{N}(2\,;0{,}01)$ *(X est d'écart-type 0,1)*, déterminer une valeur approchée de a dans chacun des cas suivants :

$$P(X \leqslant a) = 0{,}9 \qquad P(X \geqslant a) = 0{,}1 \qquad P(X \geqslant a) = 0{,}75 \qquad P(2-a \leqslant X \leqslant 2+a) = 0{,}8$$

3) On a étudié la glycémie d'une population d'individus, et on a constaté que :
   - 20% des glycémies sont inférieures à 0,82 g/l.
   - 30% des glycémies sont supérieures à 0,98 g/l.

   Dans ces conditions, si on suppose que dans cette population la glycémie G (en g/l) des individus suit une loi normale, déterminer la moyenne et l'écart-type de la glycémie. *(On demande des valeurs approchées)*

4) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(8,4)$ *(4 est la variance de X)* ; calculer

$$P(X < 7{,}5) \qquad P(X > 8{,}5) \qquad P(6{,}5 \leqslant X \leqslant 10) \qquad P_{X>5}(X > 6)$$

5) Soit X une variable aléatoire gaussienne, déterminer $E(X)$ et $\sigma(X)$ sachant que :

$$P(X < -1) = 0{,}05 \quad \text{et} \quad P(X > 3) = 0{,}12$$

6) *(Règle des trois sigmas)*
   Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ et μ un réel quelconque.
   Calculer, puis illustrer graphiquement :

$$\mathbb{P}(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \qquad \mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \qquad \mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma)$$

7) Une usine fabrique des billes de diamètre $8\,mm$. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obéit à une loi normale les paramètres étant : moyenne : $0\,mm$, écart-type : $0{,}02\,mm$.
   On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre $7{,}97\,mm$ et $8{,}03\,mm$.
   Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Ex 2 : *(Utiliser la densité de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ pour des calculs d'intégrales)*

1) Donner sans calcul *(d'intégrale)* la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\frac{(t-1)^2}{4}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, e^{-2t^2}\,\mathrm{d}t$$

2) Soient a, b, c trois réels tels que $a > 0$,
   en utilisant la densité des lois normales, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)}\,\mathrm{d}t$$

Ex 3 : Loi log-normale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
On note $Y = e^X$.

1) Montrer que Y est une variable à densité et en donner une.
2) Montrer que Y possède un moment à tout ordre et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(Y^n) = e^{nm + \frac{n^2\sigma^2}{2}}$$

3) En déduire l'espérance et la variance de Y.

Ex 4 : *(G2E 2014)*

Une turbine a une durée de vie qui est une variable aléatoire C (exprimée en milliers d'heures) dont on admet qu'elle suit une loi normale.

1) L'expérience a montré que $P(C \leqslant 80) = 0.977$ et $P(C \leqslant 20) = 0.160$.
   a. Démontrer que la moyenne m et l'écart-type σ de la variable aléatoire C sont solutions d'un système linéaire que l'on donnera.
   b. En arrondissant les coefficients de ce système aux entiers les plus proches, déterminer des valeurs approchées de m et σ. *(On utilisera ici une table ou la calculatrice).*
2) Calculer, à l'aide des valeurs aprochées précédentes, les probabilités ci-dessous :
   a. probabilité que la turbine ait une durée de vie supérieure à quatre-vingt-dix mille heures.
   b. probabilité que la turbine ait une durée de vie de moins de dix mille heures.