

- 1) C'est une équation différentielle d'ordre 1
à coefficients constants avec une condition initiale.

$$\begin{aligned} z &: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto z_0 e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

2)

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad F(t) = 1 - \frac{z(t)}{z_0}$$

$F(t)$ est la proportion d'individus morts entre 0 et t .

- 3) • F est (la restriction à $\mathbb{R}_+$) de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre α .

- En notant X la durée de vie d'un individu de la cohorte

$$\text{on a } \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad P(X \leq t) = F(t)$$

$$\text{donc } X \sim \mathcal{E}(\alpha)$$

$$\text{donc } X \text{ possède une espérance et } E(X) = \frac{1}{\alpha}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\alpha}$$

3) a) $\mathcal{N}(t)$: nombre d'individus, à t

$\mathcal{N}(t+\Delta t)$: " à $t+\Delta t$

donc $\mathcal{N}(t) - \mathcal{N}(t+\Delta t)$ est le nombre de morts entre t et $t+\Delta t$

b)

$$\varepsilon_{\Delta t} = t_0 \underbrace{\frac{\mathcal{N}(t_0) - \mathcal{N}(t_0 + \Delta t)}{\mathcal{N}_0}}_{p_0} + \dots + t_n \underbrace{\frac{\mathcal{N}(t_n) - \mathcal{N}(t_n + \Delta t)}{\mathcal{N}_0}}_{p_n} + \dots$$

p_n : proportion de morts entre t_n et $t_n + \Delta t$.

donc $\varepsilon_{\Delta t} \approx$ la durée de vie moyenne des individus de la cohorte.

/

$$\Rightarrow \text{Pour } t \in \mathbb{R}_+ \quad \gamma(t) = \gamma_0 e^{-\alpha t}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x t \gamma'(t) dt &= \int_0^x t \gamma_0 (-\alpha) e^{-\alpha t} dt \\ &= \left[t \gamma_0 e^{-\alpha t} \right]_0^x - \int_0^x \gamma_0 e^{-\alpha t} dt \\ &= \gamma_0 x e^{-\alpha x} - \int_0^x \gamma_0 e^{-\alpha t} dt \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} \gamma_0 e^{-\alpha t} dt. \end{aligned}$$

$$\text{or } \int_0^{+\infty} \gamma'(t) dt = \int_0^{+\infty} \gamma_2(\alpha) e^{-\alpha t} dt$$

$$\text{donc } \boxed{\lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \xi_{\Delta_t} = \frac{1}{\alpha}}$$

α est homogène à l'inverse du temps.

$$\text{donc } \boxed{\text{l'unité de } \alpha \text{ est année}^{-1}}$$

$\frac{1}{\alpha}$ est une approximation de la durée moyenne dans cette cohorte (en année⁻¹).

On recolte les informations suivantes

t_i	0	1	...	n	
n_i	n_{i0}	n_{i1}		0	

← Années

← effectifs de la cohorte.

la durée de vie moyenne est environ égale à : $(\Delta t = 1)$

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{n_{i0}} (n_{i0} - n_{i+1}) \times i$$

↑
1 an.

II Modèle de Bernoulli.

1) a)

b) $\begin{cases} -\frac{dx}{dt} : & \text{vitesse instantanée de mortalité.} \\ cS : & \text{nombre de morts l'année } t \text{ dus à la variole.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= bS - aR - (a + b + c)S \\ &= -ax - cS. \end{aligned}$$

donc
$$a = -\frac{1}{x} \left(\frac{dx}{dt} + cS \right)$$

2) a est le taux de mortalité - de cause indépendante de la variole.

$$\frac{dz}{dt} = -az \quad (\text{d'après la partie 1.})$$

donc
$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x} \left(\frac{dx}{dt} + cS \right) z$$

3) (a) u et S sont de classe C^1 donc $q = \frac{u}{S}$ aussi.

$$\text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \quad q(t) = \frac{R}{S} + 1$$

$$\text{donc} \quad q'(t) = \frac{R'S - S'R}{S^2}$$

$$= \frac{(bS - aR)S + (a+b+c)RS}{S^2}$$

$$= b + (b+c) \frac{R}{S}$$

$$= b + (b+c)(q(t) - 1)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad q'(t) = (b+c)q(t) - c$$

$$\text{or } b+c = \frac{1}{8} \text{ et } c = \frac{1}{64}$$

donc

$$q' = \frac{1}{8}q - \frac{1}{64}$$

(b) q est la solution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0 \quad q(t) = \frac{1}{8} + k e^{\frac{t}{8}}$$

$$\begin{aligned} \text{a} \quad q(0) &= \frac{R(0) + S(0)}{S(0)} \\ &= \frac{S(0)}{S(0)} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\forall t \geq 0, \quad q(t) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} e^{\frac{t}{8}}}$$

3)(a). $\begin{cases} x_2 \text{ et } x \text{ sont \textit{\textbf{à}} \text{ valeurs strictement positives,} \\ x_2 \text{ et } x \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$

H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $(H = \ln(x_2) - \ln(x))$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{x_2} \frac{dx_2}{dt} - \frac{1}{x} \frac{dx}{dt}.$$

$$= \frac{1}{x} \left(\frac{dx}{dt} + cS \right) - \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} \quad (\text{d'après 1c})$$

$$= \frac{cS}{x}.$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{c}{q}}$$

donc

$$\text{Pour } t \geq 0, \quad \frac{dH}{dt}(t) = \frac{1}{8(1+7e^{t/8})}$$

$$\exists h \in \mathbb{R} : \ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(6) + h.$$

$$\exists C \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{y}{x} = C \times 6$$

donc

$$y(t) = C \left(\frac{e^{t/8}}{1+7e^{t/8}} \right) x(t)$$

or $y(0) = x(0)$ donc $C = 8$

d'où

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = \left(\frac{8e^{t/8}}{1+7e^{t/8}} \right) x(t)$$

$$\forall (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad M(\lambda, \mu, \gamma) = \sum_{t=0}^{83} (\ell_t - \lambda e^{-\mu t} - \gamma)^2.$$

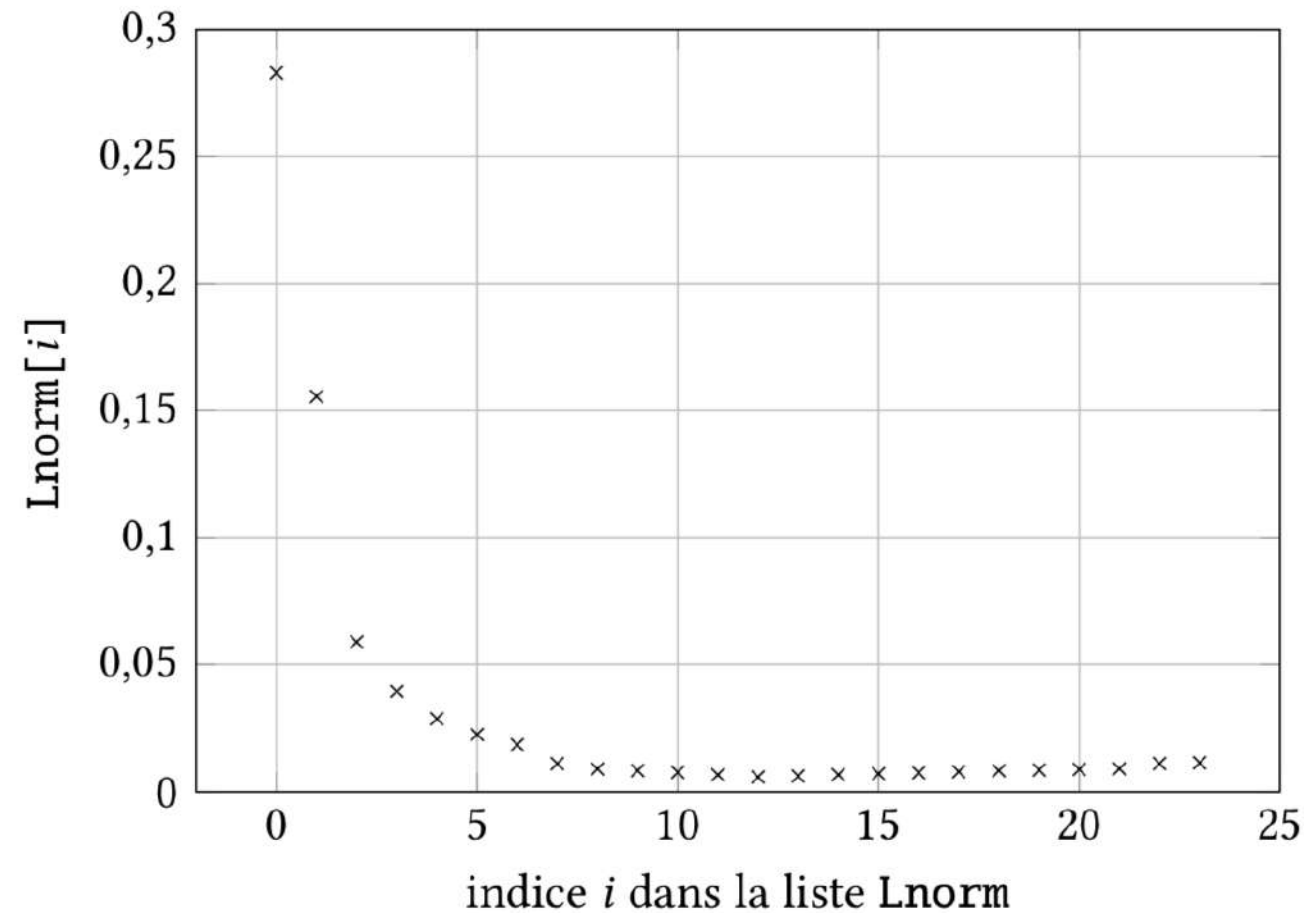


FIGURE 1 – Tracé des valeurs de ℓ_t

Question 3] 2. (b).

$$\ell_t \approx \lambda e^{-\mu t} + \gamma$$

$$\gamma \approx \lim_{t \rightarrow \infty} \ell_t$$

$$\boxed{\gamma_0 \approx 0,01}$$

$$\bar{a} \quad t=0$$

$$\ell_0 \approx \lambda_0 + \gamma_0$$

$$\ell_0 \approx 0,28$$

$$\boxed{\lambda_0 \approx 0,27}$$

Question 3) 2. (d)

(d) Le tracé de la fonction M_μ est donné en figure 2. Expliquer si ce tracé est utile pour déterminer la valeur de μ cherchée. Si oui, proposer une valeur, notée μ_0 ; si non, que faudrait-il tracer ?

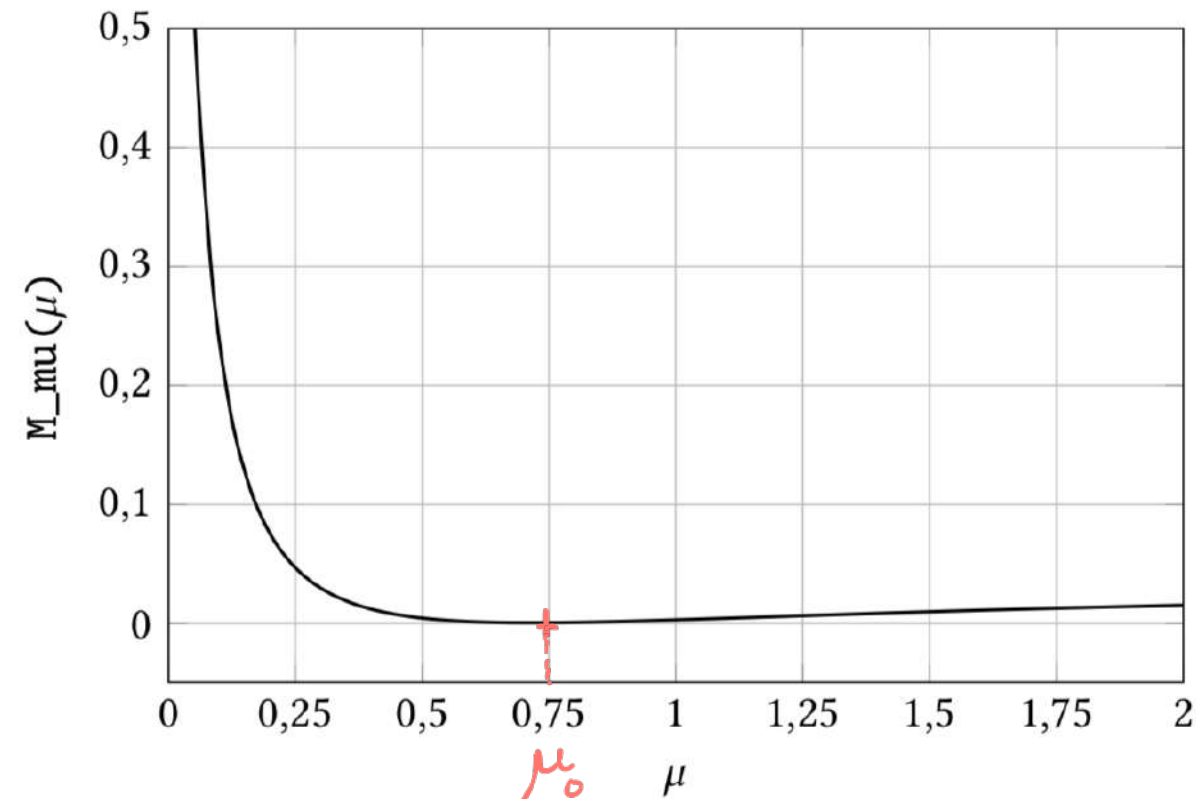
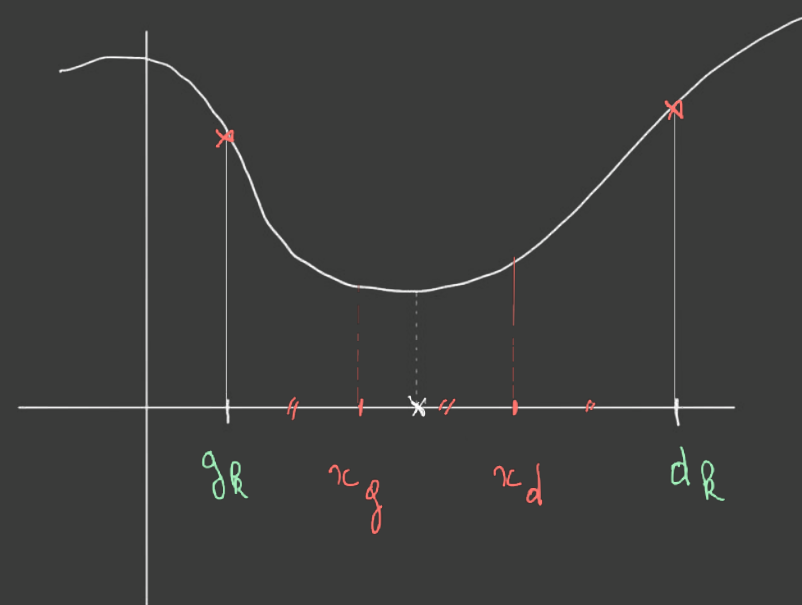
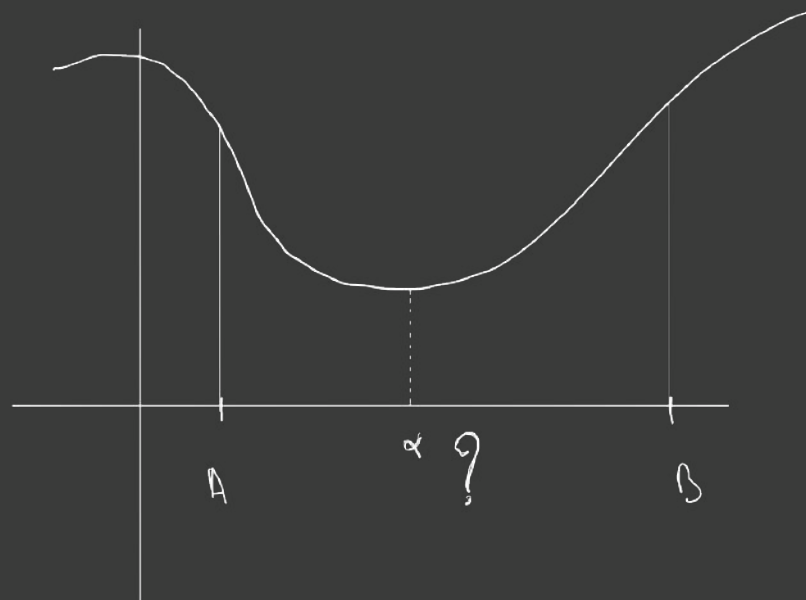


FIGURE 2 – Tracé de la fonction M_μ

μ_0 est la valeur pour laquelle M_μ est minimale.

$$\mu_0 \approx 0,75$$

Illustration des questions 313.



on sait que $\alpha \in [g_k, d_k]$

ici $f(x_d) > f(x_g)$ donc $\alpha \notin [x_d, d_k]$

donc $\alpha \in [g_k, x_d]$

on pose $\begin{cases} g_{k+1} = g_k \\ d_{k+1} = x_d \end{cases}$