Correction du devoir à la maison rendu le 1er février 2023.

1) On note $x_1 = \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_\infty$ et $x_2 = \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_\infty$. Alors

$$\begin{aligned} m_1\mathrm{C}_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= m_1\mathrm{C}_1\frac{\mathrm{dT}_1}{\mathrm{d}t} \\ &= h_1\ \mathrm{S}_1\ (\ \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) \quad \text{en utilisant (E)} \\ &= h_1\ \mathrm{S}_1\ (\ \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_\infty + \mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}_1) \\ &= h_1\ \mathrm{S}_1\ (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

De-même, nous obtenons pour x_2 :

$$\begin{aligned} m_2\mathrm{C}_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= m_2\mathrm{C}_2\frac{\mathrm{dT}_2}{\mathrm{d}t} \\ &= h_1\ \mathrm{S}_1\ (\ \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2) - h_2\ \mathrm{S}_2 x_2 + u \quad \text{en utilisant (E)} \\ &= h_1\ \mathrm{S}_1\ (x_1 - x_2) - h_2\ \mathrm{S}_2 x_2 + u \end{aligned}$$

En résumé, nous avons obtenu :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{h_1\mathrm{S}_1}{m_1\mathrm{C}_1}(x_2 - x_1) \underset{\text{(défi.)}}{=} f_1(x_1, x_2, u) \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{h_1\ \mathrm{S}_1}{m_2\mathrm{C}_2}(x_1 - x_2) - \frac{h_2\ \mathrm{S}_2}{m_2\mathrm{C}_2}x_2 + \frac{1}{m_2\mathrm{C}_2}u \underset{\text{(défi.)}}{=} f_2(x_1, x_2, u). \end{aligned}$$

2.a) On résout simplement le système associé. En effet, x vérifie $\mathrm{A}x + bu = 0$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 + 0 &= 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 9u &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 &= x_2, \\ 2x_1 &= 9u \end{cases}.$$

En particulier, $\boxed{x_1 = x_2}$

2.b) Si la variation des deux températures est nulle $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors on a nécessairement la température de l'eau T_1 est égale à celle des petits pois T_2.
autrement dit : si $T_1 \neq T_2$ alors une des deux températures varient en fonction du temps.

2.c) Calculons la valeur de u si on considère que $x_1 = x_2 = 72$.
D'après la seconde ligne du système, si $x_1 = x_2 = 72$, alors $u = \frac{2}{9}x_1 = \frac{2}{9}72$

$$\boxed{u = 16\ \mathrm{W}}.$$

3) 3.a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 5 \\ 4 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 11\lambda + 10.$
Le discriminant associé est alors $\Delta = 81 = 9^2$, donc les deux racines sont

$$\frac{-11+9}{2} = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{-11-9}{2} = -10.$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\mathrm{Spec(A)} = \{-1, -10\}.}$$

3.b) La matrice A est de format 2×2, et possède deux valeurs propres distinctes, donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$$

3.c) Commençons par déterminer les éléments de E_{-10} (A).
Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$,

$$(\mathrm{A} + 10\mathrm{I}_2)\,\mathrm{X} = 0 \iff x = -y$$

Donc $\mathrm{E}_{-10}(\ \mathrm{A}) = \mathrm{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} >$

on montre de même $\mathrm{E}_{-1}(\ \mathrm{A}) = \mathrm{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} >$

donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de vecteurs propres de } A}$

3.d) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs -1 et -10, on en déduit en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix}$, que P est inversible et que : $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} P^{-1}$,

L'inverse de P est $P^{-1} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix}$. *(Formule donnant l'inverse d'une matrice 2×2)*

4)

4.a)

$$\begin{aligned} z(t) &= \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{9} x_1(t) + \frac{5}{9} x_2(t) \\ \frac{4}{9} x_1(t) - \frac{5}{9} x_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \frac{dx_1}{dt}(t) + \frac{5}{9} \frac{dx_2}{dt}(t) \\ \frac{4}{9} \frac{dx_1}{dt}(t) - \frac{5}{9} \frac{dx_2}{dt}(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) \end{pmatrix} \\ &= P^{-1} \frac{dx}{dt}(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{P}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

4.b) Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{P}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ &= \mathrm{P}^{-1} \left(\mathrm{PDP}^{-1} x + bu \right) \\ &= \mathrm{DP}^{-1} x + \mathrm{P}^{-1} bu \\ &= \mathrm{D}z + \beta u, \qquad \text{en posant } \beta = P^{-1} b. \end{aligned}$$

en calculant $P^{-1}b$ on obtient $\beta = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ et

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{D}z + \beta u}$$

4.c) On suppose que $\mathrm{T}_1(0) = 20°\mathrm{C}$ et $\mathrm{T}_2(0) = 92°\mathrm{C}$. Alors :

$$z(0) = \mathrm{P}^{-1} x(0) = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \end{pmatrix} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 72 \\ -72 \end{pmatrix} = 40 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.d) La relation $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{D}z + \beta u$ donne pour $t \in \mathbb{R}^+$: $\begin{cases} z_1'(t) &= -z_1(t) + 80 \\ z_2'(t) &= -10 z_2(t) - 80 \end{cases}$

On en déduit qu'il existe deux réels k_1 et k_2 tels que : $\begin{cases} z_1(t) = k_1 e^{-t} + 80 \\ z_2(t) = k_2 e^{-10t} - 8 \end{cases}$

Et en tenant compte des conditions initiales $z_1(0) = 40, \quad z_2(0) = -40$, il vient, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\boxed{z_1(t) = -40\mathrm{e}^{-t} + 80, \qquad z_2(t) = -32\mathrm{e}^{-10t} - 8.}$$

4.e) En utilisant la relation $x = \mathrm{P}z$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} x_1(t) = z_1(t) + z_2(t) \\ x_2(t) = \frac{4}{5}z_1(t) - z_2(t). \end{cases}$$

Après calculs, on trouve le système de l'énoncé :

$$\begin{cases} x_1(t) = 72 - 40\mathrm{e}^{-t} - 32\mathrm{e}^{-10t} \\ x_2(t) = 72 - 32\mathrm{e}^{-t} + 32\mathrm{e}^{-10t} \end{cases}.$$

5) 5.a) La fonction x_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme de telles fonctions.
et pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$x_2'(t) = 32\mathrm{e}^{-10t} - 320\,\mathrm{e}^{-10t}.$$

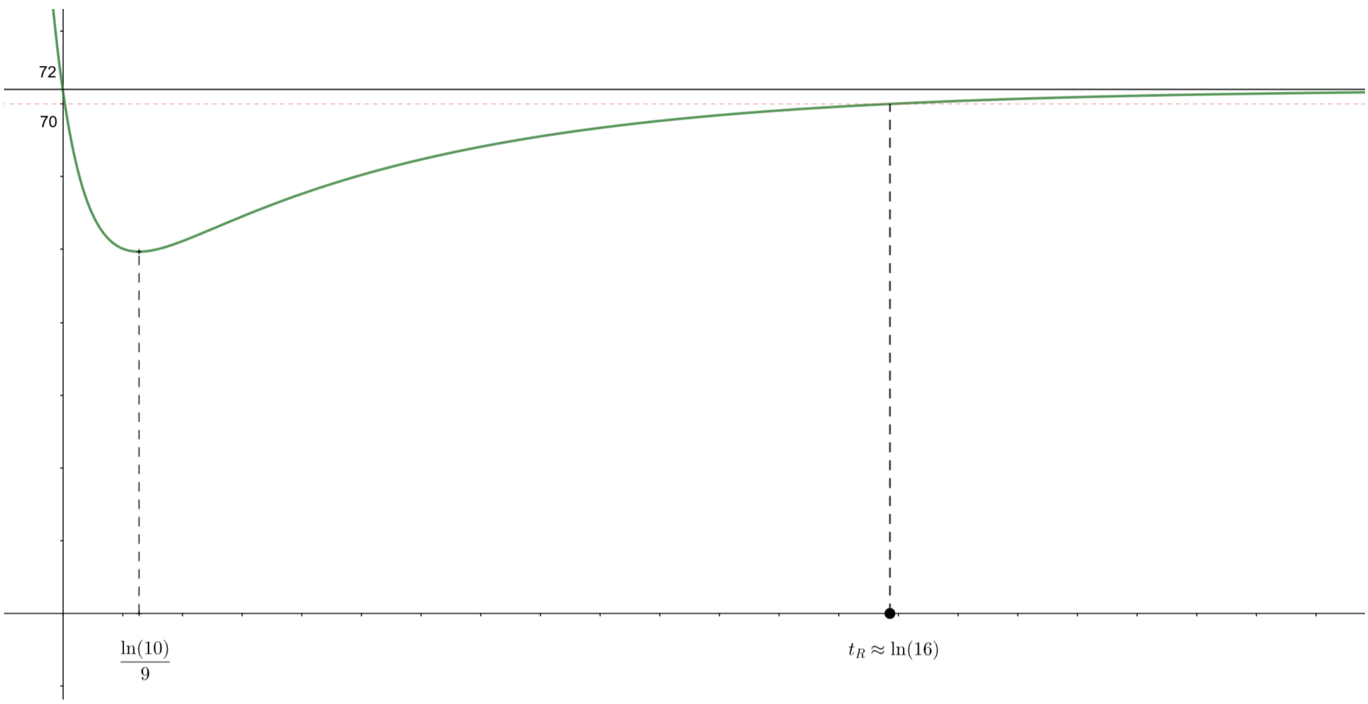
Dès lors, nous avons

$$\begin{aligned} x_2'(t) \geqslant 0 &\iff 32\mathrm{e}^{-t} \geqslant 320\,\mathrm{e}^{-10t} \\ &\iff -t \geqslant \ln(10) - 10t \\ &\iff 9t \geqslant \ln(10) \\ &\iff \quad t \geqslant \frac{\ln 10}{9} \quad (\geqslant 0). \end{aligned}$$

On déduit alors le tableau de variations ci-dessous, puis la courbe représentative de la fonction.

t	0		$\frac{\ln(10)}{9}$		$+\infty$
x_2	72	$\searrow$	$x_2\left(\frac{\ln(10)}{9}\right)$	$\nearrow$	72

La dérivée s'annulant en $\frac{\ln(10)}{9}$, nous avons donc une tangente horizontale en ce point.



5.b) L'eau est à 92 degré au début et elle baisse brutalement pendant environ 15 s quand les pois sont mis dans l'eau. Ensuite la puissance de chauffe parvient à compenser cette baisse et ramène la température entre 90 et 92 degré après environ 2mn et 45s.

5.c)
$$t_{\mathrm{R}} = \min\left\{t \geqslant 0; \forall t' \geqslant t,\ \mathrm{T}_2\left(t'\right) \geqslant 90\right\} = \min\left\{t \geqslant 0; \forall t' \geqslant t, x_2\left(t'\right) \geqslant 70\right\}.$$
C'est donc le plus petit temps à partir duquel la courbe de x_2 reste après au-dessus de la droite $x = 70$. Ainsi, après ce temps, la courbe de chauffe x_2 respecte le cahier des charges imposé par l'industriel.

5.d) Nous avons $x_2(\ln(16)) = 72 - \dfrac{32}{16} + \dfrac{32}{16^{10}} = 70 + \dfrac{32}{16^{10}} \approx 70.$

Donc $\boxed{\ln(16) \text{ est une bonne approximation de } t_{\mathrm{R}}.}$

Les valeurs propres sont les coefficients dans les exponentielles décroissantes. Plus les valeurs propres seront négatives, plus x_2 convergera vite vers 72, donc plus t_{R} sera petit.
Seule la plus grande valeur propre (-1) a une réelle influence sur la valeur de t_{R}.

1 -2) Commande en boucle fermée (cas u variable)

6) Avec ce choix de chauffage, lorsque x_2 baisse alors u augmente. Ainsi, ce système aura tendance à réguler la température de l'eau en l'augmentant/diminuant lorsque cela est nécessaire.

7) Si $k = 0$, alors u est constant et on tombe dans le cadre des questions précédentes. Ainsi : $t_{\mathrm{R}} \approx \ln(16)$.

8) On constate que $c^{\top}.w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 72 \\ x_2 - 72 \end{pmatrix} = x_2 - 72.$
On en déduit alors la dérivée de w,
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= \mathrm{A}x + bu \\
&= \mathrm{A}\left(w + 72\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + b\left(16 + k\left(72 - x_2\right)\right) \\
&= \mathrm{A}\left(w + 72\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + b\left(16 - k^{\top}c.w\right) \\
&= \left(\mathrm{A} - kb^{\top}c\right)w + 72\ \mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 16b
\end{aligned}$$

Après calculs, on trouve que $72\ \mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 16b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où la formule de l'énoncé :
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \left(\mathrm{A} - kb^{\top}c\right)w.$$

9)
9.a) Calculons les deux valeurs propres à l'aide du déterminant. Nous avons
$$\mathrm{A} - kb^{\top}c = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$
Soit $\lambda \in \mathbf{C}$,
$$\mathrm{D}(\lambda) \underset{(\text{défi.})}{=} \begin{vmatrix} -5-\lambda & 5 \\ 4 & -6-9k-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-6-9k-\lambda) - 20.$$
En développant, on obtient :
$$\mathrm{D}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(9k+11) + 5(9k+2).$$
Le discriminant de ce polynôme en λ est alors $(9k+11)^2 - 20(9k+2) = 9\left(9k^2 + 2k + 9\right) \geqslant 0$ puisque $k \geqslant 0$.
Ainsi,
$$\operatorname{Spec}\left(\mathrm{A} - kb^{\top}c\right) = \left\{\frac{-9k - 11 - 3\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}{2}, \frac{-9k - 11 + 3\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}{2}\right\}$$
On note : $\lambda_1(k) = \dfrac{-9k - 11 - 3\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}{2}$ et $\lambda_2(k) = \dfrac{-9k - 11 + 3\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}{2}$.

9.b) La fonction λ_1 est une somme de fonctions décroissantes, donc λ_1 est décroissante.
Pour λ_2, nous allons calculer la dérivée.
pour $k \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
\lambda_2'(k) &= \frac{1}{2}\left(-9 + \frac{3}{2}\frac{18k+2}{\sqrt{9k^2+2k+9}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-9 + 3\frac{9k+1}{\sqrt{9k^2+2k+9}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{-9\sqrt{9k^2+2k+9}+3(9k+1)}{2\sqrt{9k^2+2k+9}}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_2'(k) \leqslant 0 &\iff 3(9k+1) \leqslant 9\sqrt{9k^2+2k+9} \\
&\iff (9k+1)^2 \leqslant 3^2\left(9k^2+2k+9\right) \quad \text{quantités positives car } k \geqslant 0 \\
&\iff 81k^2+18k+1 \leqslant 81k^2+18k+81 \\
&\iff 1 \leqslant 81.
\end{aligned}$$

Ainsi la fonction λ_2' est négative sur $\mathbb{R}^+$, d'où :

$$\boxed{\text{Les fonctions } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont des fonctions décroissantes}}$$

10) Plus k est grand et plus les valeurs propres de $\mathrm{A} - kb^\top c$ seront petites dans les négatifs, donc plus le temps t_R sera petit d'après la question 5.4.

En revanche, si l'on augmente trop la valeur de k, on augmente l'énergie à fournir pour la chauffe.