

Partie 1

1)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) + n\bar{x}^2 \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

2) $F : (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$ est polynomiale en a et en b donc elle admet des dérivées partielles et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial a}(a, b) &= \sum_{i=1}^n -2(y_i - a - bx_i) \\
&= -2 \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n 1 - b \sum_{i=1}^n x_i \right) \\
\frac{\partial F}{\partial b}(a, b) &= \sum_{i=1}^n -2x_i(y_i - a - bx_i) \\
&= -2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - b \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a, b) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} n\bar{y} - na - bn\bar{x} = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - an\bar{x} - b \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = \bar{y} - b\bar{x} \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\bar{y} - b\bar{x})n\bar{x} - b \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = \bar{y} - b\bar{x} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Remarque : on a pu diviser par $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ car les x_i sont supposés distincts.

En notant : $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ et $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ le couple $(\hat{a}, \hat{b})$ est l'unique solution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a, b) = 0 \end{cases}$$

- 3) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $F(a, b)$ est la somme des carrés des distances des points $M_i(x_i, y_i)$ aux points $N_i(x_i, a + bx_i)$ de la droite d'équation $y = a + bx$: (faire une figure).
Minimiser $F(a, b)$ revient à chercher la droite qui réalise le meilleur ajustement linéaire au sens des moindres carrés.

La droite d'équation $y = \hat{a} + \hat{b}x$ est la droite de régression linéaire associée au nuage de points $((x_i, y_i))_{1 \leq i \leq n}$

- 4) La calculatrice nous donne avec ces données : $\hat{a} \approx 1,9$ et $\hat{b} \approx 3,0$

- 5) a) La fonction moy fait la somme des éléments de L puis la divise par la longueur de L

```
def moy(L):
    s = 0
    for t in L:
        s += t
    return s/len(L)
```

- b) Les réponses dans l'ordre sont : Vrai, Faux, Faux, Vrai, Faux.

- c) On utilise la fonction moy et la formule $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ en calculant séparément le numérateur et le dénominateur.

```
def Bchap(x, y):
    n = len(x)
    xbar = moy(x)
    num, den = 0, 0
    for i in range(n):
        num += y[i]*(x[i] - xbar)
        den += (x[i] - xbar)**2
    return num/den
```

- d) On utilise les deux fonctions précédentes et la formule $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$,

```
def Achap(x, y):
    xbar = moy(x)
    ybar = moy(y)
    return ybar - Bchap(x, y)*xbar
```

Partie 2

- 1) $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$ et $a + bx_i$ est une constante donc $\mathbb{E}(Y_i) = a + bx_i + \mathbb{E}(\varepsilon_i)$
on sait de plus que ε_i est d'espérance nulle donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_i) = a + bx_i}$$

2) $\mathbb{E}$ est linéaire donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x})\right) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\mathbb{E}(Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(a + bx_i) \\ &= a \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})x_i \\ &= b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})x_i\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x})\right) = b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})x_i = b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

(Plusieurs réponses possibles)

3) $\mathbb{E}$ est linéaire et $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{b}) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x})\right) \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \left(b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) \quad \text{d'après 2)} \\ &= b\end{aligned}$$

On a bien : $\mathbb{E}(\hat{b} - b) = 0$, $\boxed{\hat{b} \text{ est un estimateur sans biais de } b}$

4) $\mathbb{E}$ est linéaire et $\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \hat{b}\bar{x}$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{a}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) - \bar{x}\mathbb{E}(\hat{b}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + bx_i) - \bar{x}b \quad \text{d'après 1) et 3)} \\ &= a + b\bar{x} - \bar{x}b = a\end{aligned}$$

On a bien : $\mathbb{E}(\hat{a} - a) = 0$, $\boxed{\hat{a} \text{ est un estimateur sans biais de } a}$

5)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^n (Y_i - a - bx_i)(x_i - \bar{x}) \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x}) - a \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}_{=0} - b \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i(x_i - \bar{x})}_{=\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\end{aligned}$$

or $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \neq 0$ donc

$$\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} - b$$

$$\widehat{b} - b = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

6) On sait que pour X une variable aléatoire admettant une variance $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

on en déduit : $V(\widehat{b}) = V(\widehat{b} - b)$

7) $\widehat{b} - b = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ et les ε_i sont mutuellement indépendantes.

or pour des variables indépendantes : $V(\sum a_i X_i) = \sum a_i^2 V(X_i)$ donc :

$$\begin{aligned} V(\widehat{b} - b) &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 V(\varepsilon_i) \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2} \times \sigma^2 \times \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

or $V(\widehat{b}) = V(\widehat{b} - b)$ donc

$$V(\widehat{b}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

8)

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = i$ donc

$$\bar{x} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n(n+1)(2(2n+1) - 3(n+1))}{12} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{12}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$,

$\widehat{b}_n$ admet une variance et son espérance vaut b donc (*Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*)

$$P\left(\left|\widehat{b}_n - b\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(\widehat{b}_n)}{\varepsilon^2}$$

or avec les résultats des deux questions précédentes on a : $V(\widehat{b}_n) = \frac{12\sigma^2}{n(n+1)(n-1)}$ ce qui donne

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq P\left(\left|\widehat{b}_n - b\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{12\sigma^2}{\varepsilon^2 n(n+1)(n-1)}$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12\sigma^2}{\varepsilon^2 n(n+1)(n-1)} = 0$ donc (*théorème des gendarmes*) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\widehat{b}_n - b\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

En conclusion :

$$\boxed{\widehat{b}_n \text{ converge en probabilité vers } b}$$

9) On note $\lambda_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}$ de sorte que : $\widehat{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$
(d'après les hypothèses sur les μ_i)

$$\text{a) } \widehat{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i, \quad \tilde{b} = \sum_{i=1}^n \mu_i Y_i \quad \text{et} \quad \tilde{b} - \widehat{b} = \sum_{i=1}^n (\mu_i - \lambda_i) Y_i,$$

et les ε_i sont mutuellement indépendantes donc les Y_i aussi et ainsi :

$$V(\widehat{b}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2, \quad V(\tilde{b}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \quad \text{et} \quad V(\tilde{b} - \widehat{b}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (\mu_i - \lambda_i)^2$$

$$\begin{aligned} V(\tilde{b} - \widehat{b}) &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n (\mu_i - \lambda_i)^2 \\ &= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \\ &= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{V(\tilde{b}) = V(\tilde{b} - \widehat{b}) + V(\widehat{b})}$$

b) La variance d'une variable aléatoire est toujours positive donc

$$\boxed{V(\tilde{b}) \geq V(\widehat{b})}$$

10) On note $\tilde{b} = \sum_{i=1}^n \mu_i Y_i$ un estimateur sans biais de b .

$$E(\tilde{b}) = \sum_{i=1}^n \mu_i (a + b x_i) = a \sum_{i=1}^n \mu_i + b \sum_{i=1}^n \mu_i x_i, \quad \text{donc} \quad a \sum_{i=1}^n \mu_i + b \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = b$$

Et là !! je bloque, j'aimerais pouvoir en déduire que : $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n \mu_i x_i = 1$

ce qui permettrait de conclure avec le résultat précédent .

Alors je m'arrête là.