

Correction du sujet : Modélisation mathématique et informatique (2022).

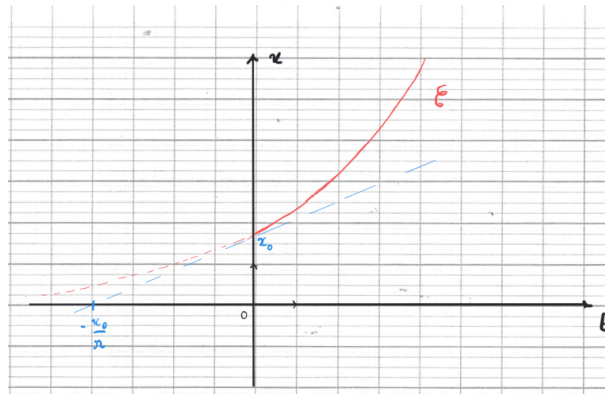
Il y a un fichier Python en annexe.

1.(a) (Equation différentielle linéaire du premier ordre, homogène à coefficients constants.

La solution de cette équation est de la forme $x : t \mapsto ce^{rt}$ avec c un réel à déterminer et la condition initiale $x(0) = x_0$ permet de conclure :

La solution de (1) est la fonction $x : t \mapsto x_0 e^{rt}$

(b) (Ne pas négliger cette question qui évalue la compétence "représenter")



(c) (Interprétation d'un modèle, à vous de réfléchir ...)

Le nombre de lièvres ne cesse de croître (une croissance exponentielle).

Ce modèle est surement acceptable quand le nombre de lièvres est petit (en fonction de l'environnement) ; mais à partir d'un certain moment il n'est plus raisonnable, la nourriture risque de manquer, l'espace de vie va devenir insuffisant ...

2.(a) (Compréhension et interprétation d'un modèle)

Tant que $x(t)$ est négligeable devant K , on peut faire l'approximation $\frac{dx}{dt} \approx rx$ et on revient au modèle de la première question et alors l'allure de la solution est celle donnée dans la question 1. (b).

(b) (Déterminer le signe d'une expression)

$\frac{dx}{dt} = \frac{rx}{K}(K - x)$, on en déduit le tableau de signe de $\frac{dx}{dt}$ en fonction de $x \geq 0$.

x	0		K		$+\infty$
$\frac{dx}{dt}$	0	+	0	-	

(c) x est une fonction continue donc avant de s'annuler la fonction prendrait une valeur dans l'intervalle $[0, K]$, mais alors $\frac{dx}{dt} \geq 0$ et ainsi x serait croissante. x ne peut pas s'annuler en étant toujours croissante.

Pour tout $t > 0$, $x(t) \neq 0$

Une autre réponse (pas dans l'esprit du sujet mais efficace sur cette question très classique) :

x est la solution d'une équation différentielle de la forme : $\frac{dx}{dt} = a(t)x$ où $a : t \mapsto r \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$

donc il existe un réel c et une fonction A pour lesquels $\forall t > 0$, $x(t) = c \exp(-A(t))$

et comme $x(0) \neq 0$ on en déduit bien :

Pour tout $t > 0$, $x(t) \neq 0$

(d) (Calcul de la dérivée d'une fonction composée)

x est dérivable et ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ donc z est dérivable sur $[0; +\infty[$,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}(t) &= \left(-\frac{1}{x^2(t)}\right) \frac{dx}{dt}(t) \\ &= \left(-\frac{1}{x^2(t)}\right) \left(rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)\right) \\ &= -\frac{r}{x(t)} + \frac{r}{K}\end{aligned}$$

et comme $z(t) = \frac{1}{x(t)}$ on obtient bien :

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{r}{K} - rz}$$

(e) (Equation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants).

La solution de cette équation est de la forme $z : t \mapsto ce^{-rt}$ avec c un réel à déterminer et la condition initiale $z(0) = z_0$ permet de conclure :

$$\boxed{z : t \mapsto \left(z_0 - \frac{1}{K}\right) e^{-rt} + \frac{1}{K}}$$

(f) (Manipuler et exploiter des expressions symboliques).

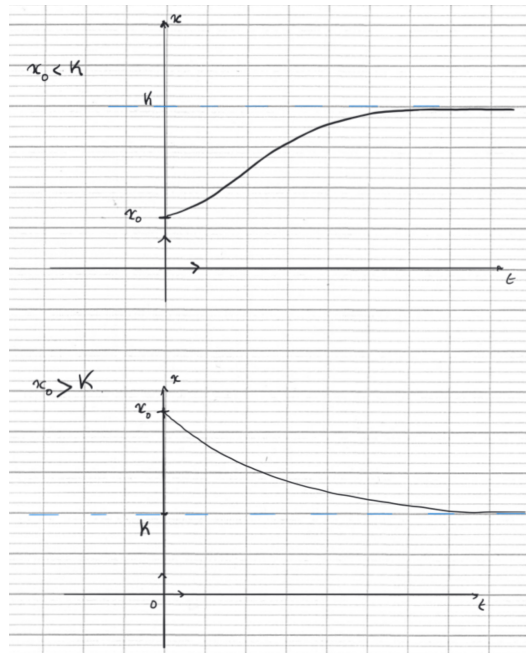
$$z(t) = \frac{1}{x(t)} \quad \text{et} \quad z_0 = \frac{1}{x_0} \quad \text{donc}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{Kx_0}{(K - x_0)e^{-rt} + x_0}}$$

(g) (calcul de limite. Argumenter)

On sait que $r > 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-rt} = 0$ et ainsi $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = K}$

(h) (Ne pas négliger cette question qui évalue la compétence "représenter")



(i) (Interprétation d'un modèle)

Dans le modèle (1) on considère que les ressources du milieu sont infinies et alors le nombre de lièvre croît exponentiellement.

Dans le modèle (2) (équation logistique), en tenant compte de ressources limitées du milieu le nombre de lièvre tend vers une constante.

K est l'effectif de la population de lièvres en situation d'équilibre.

3. (Interprétation d'un modèle)

(a) S'il n'y a pas de lynx on retrouve le modèle de la question 1) et le nombre de lièvres croît de manière exponentielle.

(b) S'il n'y a pas de lièvre, le nombre de lynx vérifie $\frac{dy}{dt} = -my$ donc $\boxed{\forall t > 0, \quad y(t) = y_0 e^{-mt}}$

Le nombre de lynx décroît de manière exponentielle.

4. (Dérivée d'une composée. Changement de variable.)

$\bar{x}(s) = \frac{q}{r}x(t)$ et $s = rt$ donc $\bar{x}(s) = \frac{q}{r}x\left(\frac{s}{r}\right)$ ce qui entraîne : $\frac{d\bar{x}}{ds}(s) = \frac{q}{r^2} \frac{dx}{dt}\left(\frac{s}{r}\right)$

$\bar{y}(s) = \frac{p}{r}y(t)$ et $s = rt$ donc $\bar{y}(s) = \frac{p}{r}y\left(\frac{s}{r}\right)$ ce qui entraîne : $\frac{d\bar{y}}{ds}(s) = \frac{p}{r^2} \frac{dy}{dt}\left(\frac{s}{r}\right)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx - pxy \\ \frac{dy}{dt} = -my - qxy \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{q}{r^2} \frac{dx}{dt} = \frac{qx}{r} - \frac{pqxy}{r^2} \\ \frac{p}{r^2} \frac{dy}{dt} = -\frac{m}{r^2}py + \frac{pqxy}{r^2} \end{cases}$$

en posant $\boxed{a = \frac{m}{r}}$ on obtient bien : $\boxed{\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{ds} = \bar{x} - \bar{x}\bar{y} \\ \frac{d\bar{y}}{ds} = -a\bar{y} + \bar{x}\bar{y} \end{cases}}$

5.(a) (Résolution d'un système. (ici non linéaire).)

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - xy = 0 \\ -ay + xy = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x - xy = 0 \\ x - ay = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} ay - ay^2 = 0 \\ x = ay \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y(1-y) = 0 \\ x = ay \end{cases} \quad \text{car } a \neq 0 \\ &\iff (y = 0 \text{ et } x = 0) \quad \text{ou} \quad (y = 1 \text{ et } x = a) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les points d'équilibre sont } (0,0) \text{ et } (a,1)}$

(b) (Interprétation d'un modèle)

Ces deux points d'équilibre représentent des situations où pendant un petit intervalle de temps le nombre de lièvres et le nombre de lynx n'évolue pas.

(c) (Interprétation d'un modèle)

$(0,0)$ est la situation où les lièvre et les lynx ont disparu.

$(1,a)$ il y a un équilibre entre la croissance des lièvres et la prédation de lynx.

6. (Etude d'une fonction)

(a) f_c est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall u > 0, \quad f'_c(u) = 1 - \frac{c}{u} = \frac{u-c}{u}$

on peut alors dresser le tableau de variations de f_c :

u	0	c	$+\infty$
$f'(u)$	—	0	+
f	$+\infty$	$f_c(c)$	$+\infty$

Limites de $f_c(u) = u - c \ln(u)$ (pas demandées ici)

- En 0 : $\lim_{u \rightarrow 0} \ln(u) = -\infty$ donc $\lim_{u \rightarrow 0} f_c(u) = +\infty$
- En $+\infty$: $f_c(u) = u \left(1 - c \frac{\ln(u)}{u}\right)$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0$ (croissance comparée) donc $\lim_{u \rightarrow +\infty} f_c(u) = +\infty$

Cette étude montre que f_c admet un minimum en c et $f_c(c) = c(1 - \ln(c))$ donc

$$\boxed{\forall u > 0, \quad f_c(u) \geq c(1 - \ln(c))}$$

- (b) • f_c est strictement décroissante sur $]0, c[$ donc $\forall u \in]0, c[, \quad f_c(u) \neq f_c(c)$
 • f_c est strictement croissante sur $]c, +\infty[$ donc $\forall u \in]c, +\infty[, \quad f_c(u) \neq f_c(c)$
 • pour $u = c, \quad f_u(c) = c(1 - \ln(c))$
 donc

$$\boxed{f_c(u) = c(1 - \ln(c)) \text{ si, et seulement si, } u = c}$$

- (c) f_c est continue sur $]0, c[$ et $M \in [f_c(c); \lim_0 f_c[$ donc il existe $b \in]0, c[$ tel que $f_c(b) = M$
 de même f_c est continue sur $]c, +\infty[$ et $M \in [f_c(c); \lim_{+\infty} f_c[$ donc il existe $B \in]c, +\infty[$ tel que $f_c(B) = M$
 On en déduit :

u	0	b	c	B	$+\infty$
$f'(u)$		-	0	+	
f	$+\infty$		$f_c(c)$		$+\infty$

et ainsi pour ces deux nombres b et B on a : $0 \leq b \leq B$ et

$$\boxed{f_c(u) \leq M \text{ si, et seulement si, } b \leq u \leq B}$$

7. On remarque que : $V(x, y) = f_a(x) + f_1(x)$

- (a) i. On remarque que : $V(x, y) = f_a(x) + f_1(x)$ donc (en utilisant 6.(a)) on obtient :

$$V(x, y) \geq f_a(x) + f_1(1) \quad \text{et} \quad V(x, y) \geq f_a(a) + f_1(y)$$

on a bien pour tout $s \geq 0$,

$$\boxed{f_a(x(s)) \leq V(x(s), y(s)) - 1 \quad \text{et} \quad f_1(y(s)) \leq V(x(s), y(s)) - a(1 - \ln(a))}$$

- ii. On note $g : s \mapsto V(x(s), y(s)) = x(s) - a \ln(x(s)) + y(s) - \ln(y(s))$

$$g \text{ est dérivable sur } [0; +\infty[\quad \text{et} \quad g'(s) = x'(s) - a \frac{x'(s)}{x(s)} + y'(s) - \frac{y'(s)}{y(s)}$$

En utilisant (5) il vient :

$$\begin{aligned} g'(s) &= (x(s) - x(s)y(s)) \times \left(1 - \frac{a}{x(s)}\right) + (-ay(s) + x(s)y(s)) \times \left(1 - \frac{1}{y(s)}\right) \\ &= x(s) - x(s)y(s) - a + ay(s) - ay(s) + x(s)y(s) + a - x(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

g est dérivable sur un intervalle et sa dérivée est nulle donc g est constante.

$$\boxed{V(x(s), y(s)) \text{ reste constante pour tout } s \geq 0}$$

- iii. En prenant $M = V(x(s), y(s)) - 1$, on sait que $V(x(s), y(s)) - 1 \geq f_a(x(s)) \geq a(1 - \ln(a))$
 donc (question 6. (c)) il existe b_x et B_x vérifiant $0 \leq b_x \leq B_x$ et tels que :

$$f_a(u) \leq M \text{ si, et seulement si, } b_x \leq u \leq B_x$$

et comme $f_a(x(s)) \leq M$, on a bien

$$\boxed{b_x \leq x(s) \leq B_x}$$

On raisonne de même en posant $M = V(x(s), y(s)) - a(1 - \ln(a))$ pour montrer qu'il existe b_y et B_y vérifiant $0 \leq b_y \leq B_y$ et tels que :

$$\boxed{b_y \leq y(s) \leq B_y}$$

(b)

$$\begin{aligned} V(x, y) &= f_a(x) + f_1(y) \\ &\geq f_a(a) + f_1(1) \quad \text{d'après 6. (a)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad V(x, y) \geq a(1 - \ln(a)) + 1}$$

$$\begin{aligned} V(x, y) = 1 - a(1 - \ln(a)) &\iff (f_a(x) - f_a(a)) + (f_1(y) - f_1(1)) = 0 \\ &\iff \begin{cases} f_a(x) - f_a(a) = 0 \\ f_1(y) - f_1(1) = 0 \end{cases} \quad \text{car } f_a(x) - f_a(a) \geq 0 \text{ et } f_1(y) - f_1(1) \geq 0 \\ &\iff \begin{cases} x = a \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{d'après 6. (b)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad V(x, y) = a(1 - \ln(a)) + 1 \iff (x, y) = (a, 1)}$$

(c) i. Pour tout $s \geq 0$, $0 < b_x \leq x(s) \leq B_x$ et $0 < b_y \leq y(s) \leq B_y$ donc

Les populations ne peuvent pas s'éteindre et ne peuvent pas devenir arbitrairement grandes

ii. Si $(x(0), y(0)) = (a, 1)$ alors l'effectif des deux populations est constant.

En revanche si on part d'une autre situation on n'atteindra jamais ce point d'équilibre, car $V(x(s), y(s))$ est constant.

Les deux populations ne s'arrêteront jamais d'évoluer.

iii. (*Interprétation d'un modèle. Note du correcteur : c'est la seule réponse non personnelle, avec la toute dernière.*)

Lorsque la population de proies est élevée et la population de prédateurs est faible, la croissance de la population de prédateurs sera positive, car il y a suffisamment de proies pour nourrir les prédateurs et permettre leur reproduction. Cela entraînera une augmentation de la population de prédateurs, ce qui réduira ensuite la population de proies.

Lorsque la population de proies est faible et la population de prédateurs est élevée, la croissance de la population de proies sera positive, car il y a moins de proies pour nourrir les prédateurs et donc moins de pression de prédation sur les proies. Cela entraînera une augmentation de la population de proies, ce qui augmentera ensuite la population de prédateurs.

8. (*Interprétation d'un modèle*)

Si K est grand par rapport à x , on retrouve le modèle (4).

Si $y = 0$, on retrouve le modèle (2)

9. (*Résolution d'un système. (ici non linéaire).*)

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\begin{cases} x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - xy = 0 \\ -ay + xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - xy = 0 \\ x = a \quad \text{ou } y = 0 \end{cases}$$

Les points d'équilibre sont $(0, 0)$, $(K, 0)$ et $\left(a; \frac{K-a}{K}\right)$

- $(0, 0)$ est le point d'équilibre qui correspond à la disparition des deux populations.
- $(K, 0)$ on retrouve la situation d'équilibre du modèle (2) avec la disparition des lynx.
- $\left(a; \frac{K-a}{K}\right)$ est un nouveau point d'équilibre où coexistent des lynx et des lièvres.

10.(a) (Savoir calculer des dérivées partielles)

g_1 et g_2 admettent des dérivées partielles par rapport à x et y et

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = 1 - \frac{2x}{K} - y, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = -x \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) = -a + x$$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2x}{K} - y & -x \\ y & -a + x \end{pmatrix}$$

(b)

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad J(K, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -K \\ 0 & K - a \end{pmatrix} \quad J\left(a; \frac{K-a}{K}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{K} & -a \\ 1 - \frac{a}{K} & 0 \end{pmatrix}$$

(c) • J_1 est diagonale donc les valeurs propres de J_1 sont $-a$ et 1 .

• J_2 est triangulaire donc les valeurs propres de J_2 sont -1 et $K - a$.

• λ est une valeur propre de J_3 si, et seulement si, $\det(J_3 - \lambda I_3) = 0$

$$\begin{aligned} \det(J_3 - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\frac{a}{K} - \lambda & -a \\ 1 - \frac{a}{K} & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + \frac{a}{K}\lambda + \frac{a}{K}(K - a) \end{aligned}$$

On note Δ le discriminant de ce polynôme, $\Delta = \left(\frac{a}{K}\right)^2 - 4\left(a - \frac{a^2}{K}\right)$

(Note du correcteur : je ne vois pas de simplification, j'y reviendrai peut-être.)

(d) • Pour J_1 , on est dans la situation du **point selle** car $a > 0$.

• Pour J_2 ,

si $K - a < 0$ et $K - a \neq -1$ alors les deux valeurs propres sont négatives donc c'est un **noeud stable**,

si $K - a > 0$ alors $K - a \neq -1$ alors c'est encore un **point selle**.

si $K - a = -1$ alors on a un **noeud dégénéré stable**.

• Pour J_3 : On utilise la propriété des trinômes : $\lambda^2 - \underbrace{\left(-\frac{a}{K}\right)}_{\text{somme des racines}} \lambda + \underbrace{\frac{a}{K}(K - a)}_{\text{produit des racines}}$

On remarque que la somme des deux racines $-\frac{a}{K}$ est toujours strictement négative.

- si $\Delta > 0$ et $K - a > 0$ alors les deux valeurs propres sont réelles négatives donc c'est un **noeud stable**,

- si $\Delta > 0$ et $K - a < 0$ alors les deux valeurs propres sont réelles et de signes opposés c'est un **point selle**.

- si $\Delta = 0$ alors il y a une seule valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension 1 ;

Ce n'est pas une homothétie.

c'est un **noeud dégénéré stable**,

- si $\Delta < 0$ la partie réelle des racines complexes est toujours négative $\left(-\frac{a}{2K}\right)$ donc c'est un **foyer stable**.

(e) Le point d'équilibre $(0, 0)$:

- il peut-être atteint avec à la fin que des prédateurs.

- ce n'est pas un point d'équilibre stable si on ajoute quelques proies la population va croître et s'éloigner du point d'équilibre.

Le point d'équilibre $(K, 0)$: C'est pas un point d'équilibre stable si et seulement si $K - a < 0$

Lorsque $K - a > 0$, si on ajoute quelques prédateurs on s'éloigne du point d'équilibre.

Le point d'équilibre $\left(a ; \frac{K-a}{K}\right)$:

C'est pas un point d'équilibre stable si et seulement si $\Delta \leq 0$ ou $K - a > 0$.

Lorsque $K - a > 0$, si on ajoute quelques prédateurs ou quelques proies on revient au point d'équilibre.

C'est le seul point d'équilibre où la population de prédateurs se maintient.

Remarque du correcteur : je n'ai pas d'interprétation de la condition $K - a < 0$.

11. Pour $k \in \mathbb{N}$,

On remarque que :

$$x_{k+1} - x_k = h(x_k - x_k y_k) , \quad y_{k+1} - y_k = h(-a y_k + x_k y_k)$$

et

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = 1 + h(1 - y_k) , \quad \frac{y_{k+1}}{y_k} = 1 + h(-a + x_k)$$

$$\begin{aligned} v_{k+1} - v_k &= x_{k+1} - a \ln(x_{k+1}) + y_{k+1} - \ln(y_{k+1}) - (x_k - a \ln(x_k) + y_k - \ln(y_k)) \\ &= h(x_k - x_k y_k) - a \ln(1 + h(1 - y_k)) + h(-a y_k + x_k y_k) - \ln(1 + h(-a + x_k)) \\ &= \underbrace{h(-a + x_k) - \ln(1 + h(-a + x_k))}_{=\varphi(h(-a + x_k))} + \underbrace{a(h(1 - y_k) - \ln(1 + h(1 - y_k)))}_{=\varphi(h(1 - y_k))} \end{aligned}$$

En posant $\varphi(x) = x - \ln(1 + x)$,

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad v_{k+1} - v_k = \varphi(h(-a + x_k)) + a\varphi(h(1 - y_k))}$$

12.(a) Or on sait que : $\forall x > -1, \quad \varphi(x) = x - \ln(1 + x) \geq 0$ (Concavité de la fonction logarithme népérien)
donc

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad v_{k+1} - v_k \geq 0}$$

(b) $v_{k+1} - v_k$ est la somme de deux termes positifs donc

$$v_{k+1} - v_k = 0 \iff \varphi(h(-a + x_k)) = 0 \text{ et } \varphi(h(1 - y_k)) = 0$$

On sait aussi que : $\forall x > -1, \quad \varphi(x) = 0 \iff x = 0$ (Stricte concavité de la fonction logarithme népérien)

donc $v_{k+1} - v_k = 0 \iff x_k = a$ et $y_k = 1$ et ainsi on a bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_{k+1} - v_k = 0 \quad \text{si, et seulement si, la suite } (x_k, y_k) \text{ est constante.}}$$

13. Nous avons dans la partie 2. que les populations n'arrêteront pas d'évoluer et que pour tout $s \geq 0$, $V(x(s), y(s))$ reste constante.

Cette propriété n'est plus vérifiée quand on discrétise le problème par la méthode d'Euler,

$$\boxed{\text{La méthode d'Euler n'est pas satisfaisante pour l'étude de ce modèle.}}$$

14.(a) `import math as m`

(b) `liste(1, 0.2)` renvoie la liste `[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]`

`liste(1, 0.3)` renvoie la liste `[0, 0.3, 0.6, 0.9]`

De façon générale dans la fonction on part de la liste $L=[0]$ et on lui ajoute les flottants $h, 2h, \dots, nh$ tels que nh est le dernier multiple de h inférieure ou égale à T .

Autrement dit : elle renvoie `[0, h, 2h, ..., nh]` avec $n = \left\lfloor \frac{T}{h} \right\rfloor$ où $[x]$ est la partie entière de x .

- (c) `Lt` contient les nombres $\left\{ \frac{k}{100} \mid k \in \llbracket 0, 2000 \rrbracket \right\}$ et `Ls` contient les nombres $\left\{ \exp\left(\frac{kr}{100}\right) \mid k \in \llbracket 0, 2000 \rrbracket \right\}$

La fonction `mystere` permet de tracer la fonction $t \mapsto e^{rt}$ sur l'intervalle $[0, 20]$

15.(a) i. `L[1]` vaut `[7]`

ii. `L[0][1]` vaut `1`

iii. `len(L)` vaut `3`

(b) `def lapin(x, y):`

`return x - x*y`

`def lynx(x, y):`

`return -a*y + x*y`

(c) `def resol_1(x0 , y0 , T, h):`

`x, y = x0, y0`

`t = 0`

`Lx = [x]`

`Ly = [y]`

`Lt = [t]`

`while t+h <= T:`

`t += h`

`Lt.append(t)`

`x, y = x + h*lapin(x,y), y + h*lynx(x, y)`

`Lx.append(x)`

`Ly.append(y)`

`return [Lt , Lx , Ly]`

lignes à écrire sur la copie

Pour ceux qui ne connaissent pas l'affectation simultanée :

`t += h`

`Lt.append(t)`

`aux = x + h*lapin(x,y)`

`y = y + h*lynx(x, y)`

`x = aux`

`Lx.append(x)`

`Ly.append(y)`

(d) • La première ligne affecte à la variable `L` une liste contenant trois listes :

`L[0]` contenant les nombres $\{kh \mid k \in \llbracket 0, 2000 \rrbracket\}$

`L[1]` contenant les nombres $\{x_k \mid k \in \llbracket 0, 2000 \rrbracket\}$

`L[2]` contenant les nombres $\{y_k \mid k \in \llbracket 0, 2000 \rrbracket\}$

• La ligne `plt.plot(L[0] , L[1])` trace la courbe du nombre de lièvres en fonction du temps.

• La ligne `plt.plot(L[0] , L[2])` trace la courbe du nombre de lynx en fonction du temps.

(e) `x0 = 1` et `y0 = 0.5` permettent de distinguer les deux courbes.

La courbe en pointillé représente le nombre de lynx (à un coefficient multiplicatif près) en fonction du temps.

L'autre courbe représente le nombre de lièvres (à un coefficient multiplicatif près) en fonction du temps.

(f) Dans la fonction suivante `Lv` contient les nombres $\{v_k \mid k \in \llbracket 0, 2000 \rrbracket\}$

`def trace_v_1 ():`

`L = resol_1(x0 , y0 , T, h)`

`Lv = []`

`for k in range(len(L[1])):`

`v = fonctionV( L[1][k], L[2][k] )`

`Lv.append(v)`

`plt.plot(L[0] , Lv)`

`plt.show ()`


```

16.(a) def resol_2(x0 , y0 , T, h):
    x, y = x0, y0
    u, w = x + h*lapin(x,y), y + h*lynx(x, y)
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    while t+h <= T:
        t += h
        Lt.append(t)
        u = x + h*lapin(x,y)
        w = y + h*( -a*y + x*y )      # ici il y avait une erreur d'énoncé
        aux_x = x + h/2*lapin(x,y)+h/2*lapin(u, w)
        y = y + h/2*lynx(x,y)+h/2*lynx(u, w)
        x = aux_x
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    return [Lt , Lx , Ly]

```

(b) Il suffit de changer la ligne `L = resol_1(x0 , y0 , T, h)` par `L = resol_2(x0 , y0 , T, h)`

(c) On a montré dans la partie 2) que la suite (v_k) doit être constante ce qui n'est pas vérifié avec la méthode d'Euler, en revanche avec la méthode de Heun on constate que la suite est quasi-constante.

17. (Note du correcteur : On pourrait faire un cours complet sur le thème de cette question !!)

On constate que la méthode d'Euler entraîne une divergence de la solution numérique, ici on l'observe avec la croissance de la fonction V .

La méthode de Heun semble améliorer cette méthode numérique car la fonction V reste constante.

18. (Note du correcteur : Encore une fois cette réponse n'est pas personnelle)

L'évolution des dynamiques de population des proies et des prédateurs dans le modèle de Lotka-Volterra est caractérisée par des cycles de croissance et de décroissance qui se répètent régulièrement au fil du temps. Plus précisément, la population de proies augmente lorsque la population de prédateurs diminue, car il y a moins de prédateurs pour chasser les proies. Cela permet à la population de proies de se développer, ce qui augmente à nouveau la population de prédateurs, car il y a plus de nourriture disponible. Cependant, à mesure que la population de prédateurs augmente, la pression de prédation sur la population de proies augmente également, ce qui finit par conduire à une diminution de la population de proies. Cette diminution de la population de proies réduit à nouveau la population de prédateurs, et le cycle recommence.

Au fil du temps, les cycles de croissance et de décroissance des populations de proies et de prédateurs peuvent se stabiliser en une oscillation régulière, connue sous le nom d'oscillation de Lotka-Volterra. Cependant, la stabilité de l'oscillation peut être perturbée par des facteurs tels que des changements dans les conditions environnementales, des introductions de nouvelles espèces ou des perturbations anthropiques, ce qui peut affecter l'équilibre des populations de proies et de prédateurs dans l'écosystème.

Vous trouverez en annexe un fichier python permettant de retrouver les figures de l'énoncé. Il a été ajouté deux fonctions permettant de représenter les cycles dont on parle dans la dernière question :

