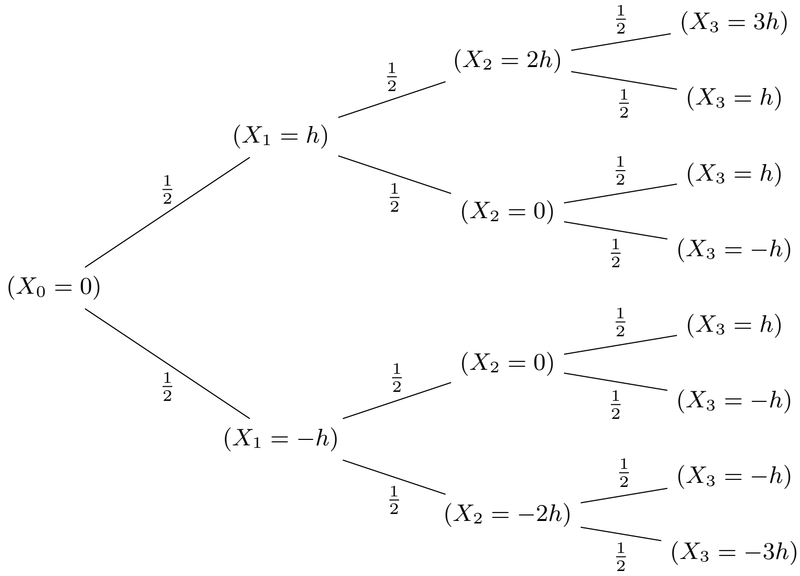
Correction du DM6 : Modélisation mathématique et informatique (2023).

Sous-Partie 1.1.

1. La situation peut-être illustrée par l'arbre de probabilités suivant :



L'ensemble des valeurs prises par X_3 est donc $\boxed{X_3(\Omega) = \{-3h, -h, h, 3h\}}$

Sa loi de probabilité est

x	$-3h$	$-h$	h	$3h$
$P(X_3 = x)$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{8}$

2. Le problème est symétrique, autrement dit : X_k et $-X_k$ suivent la même loi, donc $\boxed{\text{son espérance est nulle}}$.

Autre approche en notant D_i le $i$ème déplacement de la particule.

On a : $X_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} D_i$ donc *(linéarité)* $E(X_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E(D_i)$

sachant de plus que $D_i \hookrightarrow \mathscr{U}(\{-1;1\})$, on a : $E(D_i) = 0$ et ainsi on a bien : $\boxed{E(X_k) = 0}$

3. Cette expérience est une succession de k épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (succès : "saut à droite", de probabilité $\frac{1}{2}$)

Y_k est égale au nombre de succès donc $\boxed{Y_k \text{ suit la loi binomiale de paramètres } \left(k\,,\,\frac{1}{2}\right)}$.

4. Au temps $k\Delta t$ la particule a fait Y_k déplacements vers la droite et $(k - Y_k)$ déplacements vers la gauche

donc $X_k = Y_k \times h - (k - Y_k) \times h$

$$\boxed{X_k = (2Y_k - k)h}$$

Remarque : Sachant que $E(Y_k) = \dfrac{k}{2}$ *on retrouve* $E(X_k) = 0$

5.(a) $Y_k(\Omega) = [\![0;k]\!]$ donc l'ensemble des valeurs prises par X_k est :

$$\boxed{X_k(\Omega) = \{(2i-k)h \mid i \in [\![0;k]\!]\ \}}$$

et pour tout $i \in [\![0;k]\!]$, $P\Big(X_k = (2i-k)h\Big) = P(Y_k = i)$

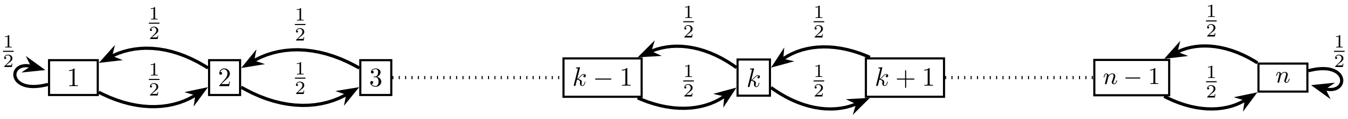
$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![0;k]\!], \quad P\Big(X_k = (2i-k)h\Big) = \binom{k}{i}\frac{1}{2^k}}$$

(b) $X_k = 2hY_k - kh$ donc $V(X_k) = 4h^2V(Y_k)$ (En utilisant la propriété de la variance : $V(aX+b) = a^2V(X)$)

de plus Y_k suit la loi binomiale de paramètres $\left(k\,,\,\frac{1}{2}\right)$ donc $V(Y_k) = \dfrac{k}{4}$

$$\boxed{V(X_k) = kh^2}$$

6. On peut se représenter la situation avec le diagramme suivant :



En appliquant pour chaque ligne la formule des probabilités totales (avec le système complet $((X_k = j)_{1\leqslant j\leqslant n})$ on obtient la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} P(X_{k+1}=1) \\ P(X_{k+1}=2) \\ \vdots \\ P(X_{k+1}=n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & P\Big(X_{k+1}=i|_{(X_k=j)}\Big) & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_k=1) \\ P(X_k=2) \\ \vdots \\ P(X_k=n) \end{pmatrix}$$

Ce qui donne avec les données de l'énoncé :

$$\begin{pmatrix} P(X_{k+1}=1) \\ P(X_{k+1}=2) \\ \vdots \\ P(X_{k+1}=n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & & \cdots & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_k=1) \\ P(X_k=2) \\ \vdots \\ P(X_k=n) \end{pmatrix}$$

Ce qui donne bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \vec{p}^{\,(k+1)} = M \cdot \vec{p}^{\,(k)} \qquad (2)}$$

Déduisons-en par récurrence sur k que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \vec{p}^{\,(k)} = M^k \cdot \vec{p}^{\,(0)}$.

- Pour $k = 0$ la relation est immédiate car $M^0 = I_n$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\vec{p}^{\,(k)} = M^k \cdot \vec{p}^{\,(0)}$,

$$\begin{aligned} \vec{p}^{\,(k+1)} &= M \cdot \vec{p}^{\,(k)} && \text{d'après (2)} \\ &= M \cdot M^k \cdot \vec{p}^{\,(0)} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= M^{k+1} \cdot \vec{p}^{\,(0)} \end{aligned}$$

On retrouve bien la propriété au rang $k + 1$

En conclusion, on a bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \vec{p}^{\,(k)} = M^k \cdot \vec{p}^{\,(0)}}$$

7. M est une matrice réelle et symétrique elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, autrement dit :

$\boxed{\text{il existe une matrice } P \text{ inversible et une matrice } D \text{ diagonale telles que : } M = PDP^{-1} \text{ et } P^{-1} = P^\top}$

Remarque : Ici toutes les matrices sont à coefficients réels.

8. $\operatorname{rg}(M - I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \underset{L_2+L_1\to L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \underset{L_3+L_2\to L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\operatorname{rg}(M - I_3) = 2$,

ce qui entraîne que $\boxed{\text{1 est une valeur propre de } M}$ et que $\boxed{\text{son espace propre associé est de dimension 1}}$

(théorème du rang)

on remarque de plus que : $M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } M \text{ associé à } 1}$

9.(a) Le sous-espace propre associé à λ_1 est de dimension 1 donc les λ_i pour $2 \leqslant i \leqslant n$ sont différents de λ_1

Or on sait que : "*Deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux*" , donc

$$\boxed{\text{pour tout } i \in [\![2; n]\!], \quad \vec{v_1}^{\top}.\vec{v_i} = 0}$$

(b) *(Ici il y a une erreur d'énoncé)*

- D'une part :

$$\begin{aligned} N\vec{v_1} &= M\vec{v_1} - \frac{\lambda_1}{\|\vec{v_1}\|_2^2}\vec{v_1}\vec{v_1}^\top\vec{v_1} \\ &= M\vec{v_1} - \frac{\lambda_1}{\|\vec{v_1}\|_2^2}\vec{v_1}\left(\|\vec{v_1}\|_2^2 I_1\right) \\ &= \lambda_1\vec{v_1} - \lambda_1\vec{v_1} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v_1} \text{ est un vecteur propre de } N \text{ associée à la valeur propre } 0}$$

- D'autre part pour $i \in [\![2;n]\!]$:

$$\begin{aligned} N\vec{v_i} &= M\vec{v_i} - \frac{\lambda_1}{\|\vec{v_1}\|_2^2}\vec{v_1}\vec{v_1}^\top\vec{v_i} \\ &= M\vec{v_i} - \frac{\lambda_1}{\|\vec{v_1}\|_2^2}\vec{v_1}\left(0 I_1\right) \\ &= \lambda_i\vec{v_i} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour } i \in [\![2;n]\!] : \quad \vec{v_i} \text{ est un vecteur propre de } N \text{ associée à la valeur propre } \lambda_i}$$

(c) On remarque que :

❶ $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda\vec{v}\|_1 = |\lambda|\,\|\vec{v}\|_1$ et ❷ $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\vec{v}\|_1 \neq 0 \Rightarrow \|\vec{v}\|_1 > 0$

Soit $i \in [\![2;n]\!]$,

$$\begin{aligned} \|N.\vec{v_i}\|_1 &= \|\lambda_i\vec{v_i}\|_1 \\ &= |\lambda_i|\,\|\vec{v_i}\|_1 \qquad \textit{(d'après la remarque ❶)} \end{aligned}$$

On en déduit avec (8) que $|\lambda_i|\,\|\vec{v_i}\|_1 < \|\vec{v_i}\|_1$ et comme $\vec{v_i} \neq \vec{0}$ on a $\|\vec{v_i}\|_1 > 0$ et ainsi :

$$\boxed{\forall i \in [\![2;n]\!], \quad |\lambda_i| < 1}$$

10. (a) On sait que $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}$ donc $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

on vient de montrer que $\forall i \in [\![2;n]\!], \quad |\lambda_i| < 1$ donc $\forall i \in [\![2;n]\!], \quad \lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_i^k = 0$

et comme $\lambda_1 = 1$ on obtient bien :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}}$$

(b) On a : $M = PDP^{-1}$ ce qui permet de montrer par récurence sur k que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = PD^kP^{-1}}$$

(c) On déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$

On peut choisir pour P la matrice de la famille $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ dans la base canonique et on a $P^{-1} = P^\top$
(Ici on pourrait signaler une imprécision de l'énoncé sur la définition des vecteurs $\vec{v}_i$)

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} v_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ v_{1,2} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ v_{1,n} & \cdots & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n} \\ * & & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ * & \cdots & & * \end{pmatrix}$$

or $v_{1,i} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} M^k = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}}$$

11. On sait que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \vec{p}^{\,(k)} = M^k \cdot \vec{p}^{\,(0)}$ (question 6.)
donc avec le résultat de la question précédente et le fait que $\vec{p}^{\,(0)}$ est l'ensemble des valeurs d'une loi de probabilité on obtient :

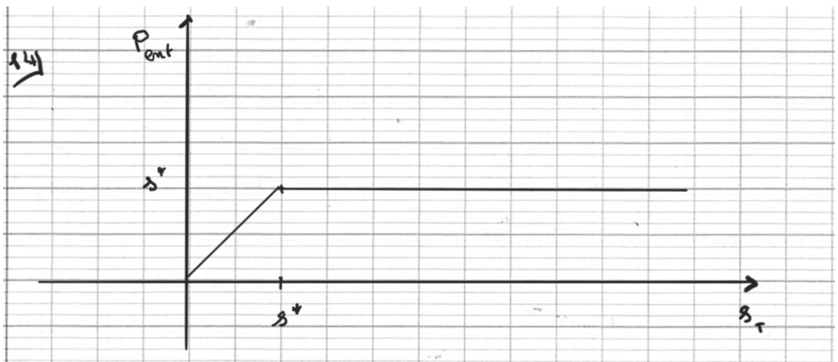
$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} \vec{p}^{\,(k)} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$$

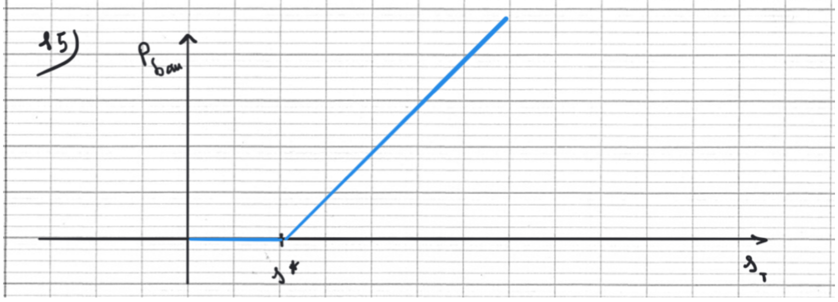
Remarque : La suite de variables aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$

12. En régime permanent, la particule se trouve en une des n positions de manière uniforme.

13. Plus la durée du contrat est importante et plus il est difficile de prévoir le cours du blé, donc plus la banque prend le risque de devoir payer la différence avec le prix d'exercice.

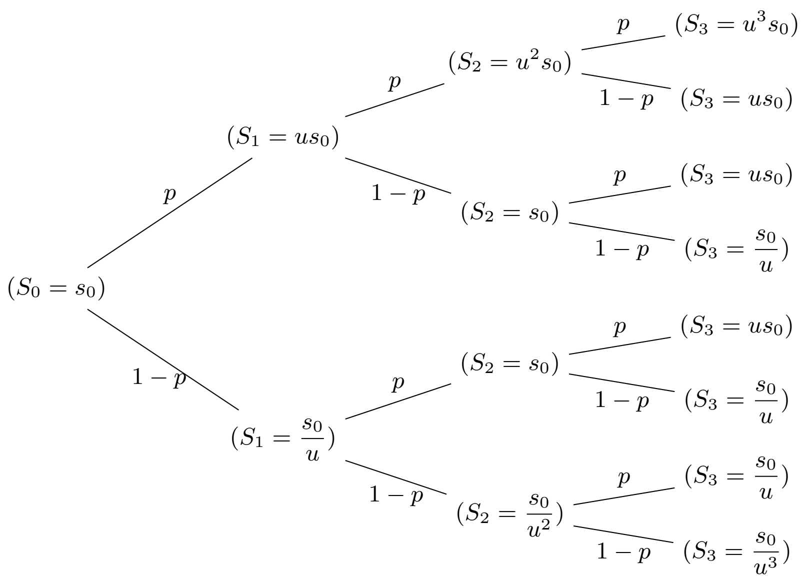
$$\boxed{\text{Le prix du call } C_T \text{ dépend de la durée du contrat.}}$$





Sous-partie 2.2.

1.(a)



On en déduit que l'ensemble des valeurs prises par S_3 est :

$$\boxed{\mathscr{D}_3 = \left\{u^3 s_0, u s_0, \frac{s_0}{u}, \frac{s_0}{u^3}\right\}}$$

On parle de modèle recombinant : " *Je n'ai pas trouvé au moment de la correction* "

Sans conviction :

Dans ce modèle, plusieurs chemins mènent au même prix ("on recombine") cela réduit le nombre de valeurs prises par le prix du blé.

Si on avait pris u pour "up" et d pour "down" avec $d \neq \frac{1}{u}$, S_n prendrait beaucoup plus de valeurs.

(b) $P(S_3 = u^3 s_0)$ est la probabilité qu'il y ait 3 hausses au temps 3 donc $\boxed{P(S_3 = u^3 s_0) = p^3}$

$P(S_3 = u s_0)$ est la probabilité qu'il y ait 2 hausses et une baisse au temps 3 donc $\boxed{P(S_3 = u s_0) = 3(1-p)p^2}$

(c) En notant Y_n le nombre de hausses à l'instant n, Y_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p).
on a la relation $S_n = s_0\, u^{2Y_n - n}$ donc

$$\boxed{\mathscr{D}_n = \left\{ s_0\, u^{2k-n} \mid k \in [\![0; n]\!] \right\}}$$

2. (a) Si $s_n \leqslant s^*$ alors G_n prend la valeur 0 et si $s_n > s^*$ alors G_n prend la valeur $s_n - s^*$
or, pour $s_n = s_0\, u^{2k-n}$ avec $k \in [\![0; n]\!]$

$$\begin{aligned}
s_n > s^* &\iff s_0\, u^{2k-n} > s^* \\
&\iff u^{2k-n} > \frac{s^*}{s_0} \\
&\iff (2k-n)\ln(u) > \ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right) \\
&\iff (2k-n) > \frac{\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)}{\ln(u)} \\
&\iff k > \frac{n}{2} + \frac{\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)}{2\ln(u)} \\
&\iff k \geqslant \left\lfloor 1 + \frac{n}{2} + \frac{\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)}{2\ln(u)} \right\rfloor
\end{aligned}$$

donc

si $s_n = s_0\, u^{2k-n}$ avec $k < a$ alors G_n prend la valeur 0

si $s_n = s_0\, u^{2k-n}$ avec $k > a$ alors G_n prend la valeur $s_0\, u^{2k-n} - s^*$

En conclusion :

$$\boxed{\mathscr{D}_{G_n} = \{0\} \cup \left\{ s_0\, u^{2k-n} \mid k \in [\![a; n]\!] \right\}}$$

(b) a représente le nombre de hausses au temps n à partir duquel la banque contribue à l'achat du blé.

(c) Application numérique.

s	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2	8
$P(S_3 = s)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

et

g	0	4
$P(G_3 = g)$	$\frac{26}{27}$	$\frac{1}{27}$

3. (a) $E(G_n) = c_n$, signifie que le prix du call est égal à l'espérance de perte de la banque.

$\boxed{\text{Le prix du call est juste lorsque qu'il correspond à la perte moyenne de la banque}}$

(b) Application numérique. $\boxed{c_3 = \frac{4}{27}}$

(c) *(On considère que le prix du call est juste)* $\mathscr{D}_{G_n} = \{0\} \cup \left\{ s_0\, u^{2k-n} \mid k \in [\![a; n]\!] \right\}$ donc

$$E(G_n) = \sum_{k=a}^{n} \left(u^{2k-n} s_0 - s^*\right) \times P(G_n = u^{2k-n} s_0 - s^*)$$

En notant Y_n le nombre de hausses à l'instant n, il vient :

$$E(G_n) = \sum_{k=a}^{n} \left(u^{2k-n} s_0 - s^*\right) \times P(Y_n = k)$$

or Y_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p)

$$\boxed{c_n = \sum_{k=a}^{n} \left(u^{2k-n} s_0 - s^*\right) \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Sous-partie 2.3.

4. (a) La première boucle permet de calculer $n!$ avec la variable `num` *(comme numérateur)*

Les deux autres boucles permettent de calculer $k! \times (n-k)!$ avec la variable `den` *(comme dénominateur)*

A la fin la fonction renvoie le quotient $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $\boxed{\text{Cette fonction renvoie bien } \binom{n}{k}}$

Le nombre d'opérations est : $(n-1) + (k-1) + (n-k-1) + 1 = 2n - 2$

A la fin le quotient `num/den` est un flottant approchant l'entier $\binom{n}{k}$. *(On aurait pu utiliser* `num//den`*)*

(b) On utilise la formule suivante : $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$

```
def Copt(n, k):
    num = 1
    for i in range(n-k+1, n+1):
        num = num*i
    den = 1
    for i in range(1, k):
        den = den*(i+1)
    return num//den
```

Cette fonction fait $2k - 2$ opérations.

5. La fonction `Feuilles` renvoie la liste des valeurs prises par G_n.

Plus précisément pour k le nombre de hausses à l'instant n, `L[k]` est la valeur prise par G_n.

6.
```
def call(n, u, s0, setoile, p):
    L = Feuilles(n, u, s0, setoile)
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S += L[k]*Copt(n, k)*p**k*(1-p)**(n-k)
    return S
```

Partie 3

7. (a) Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{S_n}{S_{n-1}}$ suit la loi uniforme sur $\left\{u\,;\dfrac{1}{u}\right\}$

Les augmentations/diminutions du prix sont indépendantes *(Pas évident dans l'énoncé mais je m'en suis déjà servi à la question 1.(c))* ce qui entrainent l'indépendance des $\frac{S_n}{S_{n-1}}$ puis celle des Z_n.

$$\boxed{\text{Les } (Z_n) \text{ sont indépendantes et les } Z_n \text{ suivent la loi uniforme sur } \{-\ln(u); \ln(u)\}}$$

(b) $E(Z_n) = 0$ et $V(Z_n) = (\ln(u))^2$.

8. (a) Les (Z_n) sont indépendantes et les Z_n suivent la même loi d'espérance 0 et de variance $(\ln(u))^2$

donc *(théorème central limite première forme)*

la suite $\left(\dfrac{\overline{Z}_n - 0}{\frac{\ln(u)}{\sqrt{n}}}\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

En posant : $\sigma = \ln(u)$ on a bien :

$$\boxed{\left(\frac{\overline{Z}_n}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \text{ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi } \mathcal{N}(0,1)}$$

(b) La volatilité (écart-type) est un paramètre de dispersion, lorqu'elle est élevée cela signifie qu'il peut y avoir de grandes variations du prix du blé au cours du temps.

9. (a)

$$\begin{aligned} V(\overline{Z}_n) &= V\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} V\left(\frac{Z_k}{n}\right) && \text{(Indépendance des } Z_k \text{)} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(Z_k) && \text{(car } V(aX+b) = a^2V(X) \text{)} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{V(\overline{Z}_n) = \frac{\sigma^2}{n}}$$

(Montrer que la variance corrigée est sans biais)

Ce que nous avons fait en classe :

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i^2 - 2Z_i\overline{Z}_n + \overline{Z}_n^2) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - 2\overline{Z}_n \sum_{i=1}^{n} Z_i + n\overline{Z}_n^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \ - \ n\overline{Z}_n^2\right) \end{aligned}$$

En utilisant la relation précédente :

$$\begin{aligned} E(V_n) &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E(Z_i^2) \ - \ nE(\overline{Z}_n^2)\right) && \textit{(linéarité)} \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} V(Z_i^2) \ - \ \sigma^2\right) && \textit{(car les espérances sont nulles)} \\ &= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 \ - \ \sigma^2\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(V_n) = \sigma^2}$$

Si on veut suivre l'indication : *(Ce que vous avez fait avec peu de succès)*

$$\begin{aligned} E(V_n) &= E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i^2 - 2Z_i\overline{Z}_n + \overline{Z}_n^2)\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(E(Z_i^2) - 2E(Z_i\overline{Z}_n) + E(\overline{Z}_n^2)\right) && \textit{linéarité de } E(.) \end{aligned}$$

or $E(Z_i) = 0$ et $E(\overline{Z}_n) = 0$ donc $E(Z_i^2) = \sigma^2$ et $E(\overline{Z}_n^2) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ et

$$\begin{aligned} E(Z_i\overline{Z}_n) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_i\, Z_j\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E(Z_i\, Z_j) \\ &= \frac{1}{n}E(Z_i^2) && \textit{(en utilisant l'indépendance et l'espérance nulle)} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

En revenant au calcul de $E(V_n)$:

$$\begin{aligned} E(V_n) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2 - 2\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 \ - \ \sigma^2\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(V_n) = \sigma^2}$$

(b) V_n est un estimateur sans biais de $\sigma^2 = (\ln(u))^2$.

(c) $U_n = \exp(\sqrt{V_n})$ est un estimateur du paramètre u.

10. (a)
```
def Newton(u0, epsilon, F, Fprime):
    n = 0
    a, b = u0, u0 - F(u0)/Fprime(u0)
    while abs(a-b)>epsilon and n < n_max:
        a, b = b, b - F(b)/Fprime(b)
        n += 1
    return b
```

(b) $\varepsilon = 0.0001$! ! ! *Je ne sais pas ce qu'attend le sujet.*

(c) Si $f'(u_n) = 0$ la fonction renvoie un message d'erreur.
On peut générer nous même un message d'erreur :

```
def Newton(u0, epsilon, F, Fprime):
    n = 0
    a, b = u0, u0 - F(u0)/Fprime(u0)
    while Fprime(b) != 0 and abs(a-b)>epsilon and n < n_max:
        a, b = b, b - F(b)/Fprime(b)
        n += 1
    if Fprime(b) == 0:
        return "Il y a un problème !! "
    return b
```

11. $c_n(u) > 0$ si, et seulement si, $u^n s_0 > s^*$ ce qui équivaut encore à $u > \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)\right)$

$$\boxed{u_{min} = \left(\frac{s^*}{s_0}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

12. si $u < u_{min}$ le cours du blé ne dépassera jamais s^* donc la banque ne versera pas d'argent à la meunerie.

13. • Soit a un entier compris entre $\lfloor 1 + \frac{n}{2} \rfloor$ et n,

$$\begin{aligned} \left\lfloor 1 + \frac{n}{2} + \frac{\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)}{2\ln(u)} \right\rfloor = a \quad &\iff \quad a \leqslant 1 + \frac{n}{2} + \frac{\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)}{2\ln(u)} < a+1 \\ &\iff \quad 2a - 2 - n \leqslant \frac{\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)}{\ln(u)} < 2a - n \\ &\iff \quad \frac{1}{2a-n} < \frac{\ln(u)}{\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)} \leqslant \frac{\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)}{2a-n-2} \\ &\iff \quad \frac{\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)}{2a-n} < \ln(u) \leqslant \frac{\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)}{2a-n-2} \\ &\iff \quad \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)}{2a-n}\right) < u \leqslant \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right)}{2a-n-2}\right) \end{aligned}$$

Donc a est constant sur les intervalles $\left[\left(\frac{s^*}{s_0}\right)^{\frac{1}{2a-n}} \ ; \ \left(\frac{s^*}{s_0}\right)^{\frac{1}{2a-n-2}}\right]$

• Sachant que a dépend de u, aux valeurs où a change de valeur f n'est surement pas dérivable.

En revanche sur les intervalles où a est constante, la fonction f est dérivable et on sait calculer la dérivée.

*(voir la question **14.**).*

• On cherche un intervalle où a est constant et f change de signe, puis on trouve la solution de $f(x) = 0$ avec la méthode de Newton sur cet intervalle.

14. Sur un intervalle où a est constant :

$$f' : u \longmapsto \sum_{k=a}^{n} (2k-n)u^{2k-n-1} s_0 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

15. (a) On cherche un intervalle où a est constant et f change de signe, puis on trouve la solution de $f(x) = 0$ avec la méthode de Newton sur cet intervalle.

(b)
```
def volatilite(F, Fprime, s0, setoile, epsilon):
    return m.log(mystere(F, Fprime, s0, setoile, epsilon))
```