Correction du sujet : Modélisation mathématique et informatique (2024).

Problème A.

Q 1. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison q donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n}$

Et dans le cas $v_0 > 0$ et sachant que $q > 0$, $\boxed{\text{une condition nécessaire et suffisante d'extinction est } 0 < q < 1}$

Q 2.

Q 2.1. Avec la fonction $\boxed{f : x \longmapsto x + \frac{x}{2}\left(\frac{S-x}{S}\right)}$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n)$

On remarque que : $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2S}(3S - x)$

C'est un trinôme de racines : 0 et $3S$ dont le tableau de variations sur $\mathbb{R}^+$ est :

x	0		$\frac{3S}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{8S}{9}$	$\searrow$	$-\infty$

Q 2.2.

```python
S = 30
v0 = 5
L = [v0]
v = v0
for k in range(n):
    v = v + v/2(S-v)/S
    L.append(v)
plt.plot(L)
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("v_n")
plt.show()
```

Q 2.3. Pour importer le module : `import matplotlib.pyplot as plt`

Q 2.4. La suite (v_n) semble monotone et semble converger vers S.

Q 2.5. Le tableau de varaitions de f sur $[0; S]$ est

x	0		S
$f(x)$	0	$\nearrow$	S

- D'une part :
  $u_0 \in]0, S]$ et d'après le tableau de variations, si $v_n \in]0, S]$ alors $v_{n+1} \in]0, S]$ donc $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in]0, S]}$
  donc $\boxed{(v_n) \text{ est majorée par } S}$.
- D'autre part : pour tout $x \in]0, S]$, $f(x) - x = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{S-x}{S}\right) \geqslant 0$
  donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n \geqslant 0$ et ainsi : $\boxed{(v_n) \text{ est croissante}}$.
- Pour la limite :
  (v_n) est croissante et majorée donc elle converge vers un réel $\ell \in]0, S]$,
  de plus on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n)$ et f continue sur $\mathbb{R}$ donc $f(\ell) = \ell$
  or sur $]0, S]$, $f(\ell) = \ell \iff \ell = S$

En conclusion :

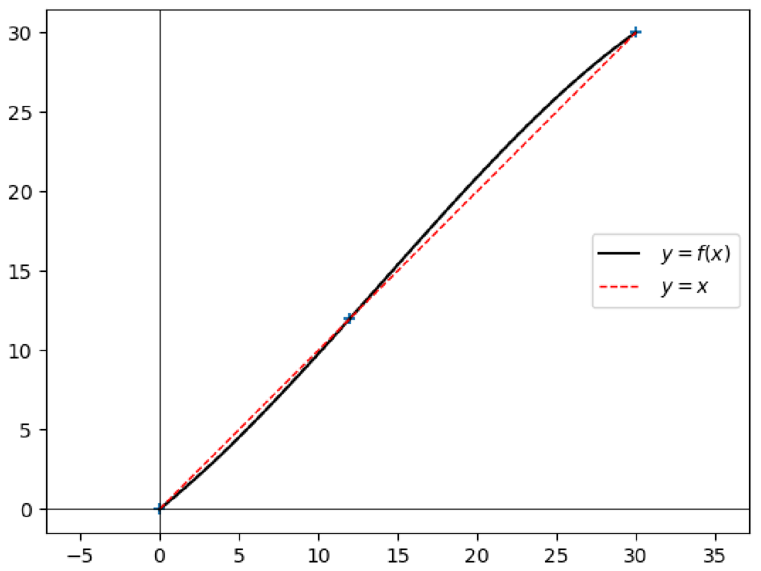
$$\boxed{(v_n) \text{ est majorée, croissante et converge vers } S.}$$

Q 3.

Q 3.1. Avec la fonction $\boxed{f : x \longmapsto x + \frac{x}{2}\left(\frac{S-x}{S}\right)\left(\frac{x-A}{S}\right)}$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n)$

On remarque : $f(x) - x = \frac{x}{2}\left(\frac{S-x}{S}\right)\left(\frac{x-A}{S}\right)$ qui permet d'établir le tableau de signe de $f(x) - x$:

x	0		A		S
$f(x) - x$	0	$-$	0	$+$	0



Q 3.2. *(même raisonnement que pour Q.2.5)*
Le tableau de variations de f permet de montrer que $]0, A[$ est stable par f et $v_0 \in]0, A[$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in]0, A[$,
de plus, sur $]0, A[$ $f(x) - x \leqslant 0$ donc $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$
La suite est minorée par 0, elle converge vers un point fixe et sur $[0, A[$, seul zéro est un point fixe donc

$$\boxed{\text{Si } v_0 \in]0, A[\text{ alors } (v_n) \text{ est décroissante et converge vers } 0}$$

Q 3.3. *(Encore le même raisonnement)*

$$\boxed{\text{Si } v_0 \in]A, S[\text{ alors } (v_n) \text{ est croissante et converge vers } S}$$

Un cas particulier :

$$\boxed{\text{Si } v_0 = A \text{ alors } (v_n) \text{ est constante égale à } A}$$

Q 3.4. A est un équilibre instable et S est un équilibre stable.
S est l'effectif permanent qu'atteint la population si au départ $v_0 \in]A, S[$
A est l'effectif seuil à partir duquel la population survit.
...

Q 4.

Q 4.1. Il suffit de résoudre $F(x_0) = 0$ qui est équivalent à $\frac{x_0}{2}\left(\frac{S-x_0}{S}\right)\left(\frac{x_0-A}{S}\right) = 0$

$$\boxed{\text{Les points d'équilibre sont } 0,\ A \text{ et } S}$$

Q 4.2. *On pourrait ici donner l'allure de la courbe $y = x(x-A)(S-x)$ pour justifier la réponse.*
Plus classiquement :

$$F'(x) = \frac{1}{2S^2}\Big((x-A)(S-x) + x(S-x) - x(x-A)\Big)$$

- $F'(0) = \dfrac{1}{2S^2}\Big(-AS\Big) < 0$ donc 0 est point d'équilibre stable.
- $F'(A) = \dfrac{1}{2S^2}\Big(A(S-A)\Big) > 0$ donc A est point d'équilibre instable.
- $F'(0) = \dfrac{1}{2S^2}\Big(-S(S-A)\Big) < 0$ donc S est point d'équilibre stable.

Q 4.3. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
La solution f vérifie : il existe $k \in \mathbb{R} : f : t \longmapsto ke^{F'(x_0)t} + x_0$
et la condition initiale permet de conclure :

$$\boxed{\text{La solution est : } t \longmapsto (y(0) - x_0)e^{F'(x_0)t} + x_0}$$

Q 4.4. Si $y(0) = x_0$ alors la solution est la fonction constante égale à x_0, , ce qui est cohérent avec un point d'équilibre.
Si $F'(x_0) < 0$ la solution tend vers x_0 quand t tend vers $+\infty$, ce qui est cohérent avec un point d'équilibre stable.
Si $F'(x_0) > 0$ alors $f(t)$ s'éloigne de x_0 quand t croit , ce qui est cohérent avec un point d'équilibre instable.

Q 5. Dans ce cas : $Z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = qZ_n$.

$$\boxed{\text{Pour chaque } n\ Z_n \text{ est la variable certaine égale à } q^n\text{, on retrouve la situation de la première question}}$$

Q 6. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p^n)$

- Pour $n = 1$,
  $Z_0 = 1$ donc $Z_1 = X_{1,1}$ qui suit la loi $\mathscr{B}(p)$ donc
  $$Z_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p^1)$$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $Z_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p^n)$,
  $Z_n(\Omega) = \{0,1\}$ et
  - si Z_n prend la valeur 0 alors Z_{n+1} aussi,
  - si Z_n prend la valeur 1 alors $Z_{n+1} = X_{n+1,1}$ prend pour valeur 0 ou 1.
  $$\text{donc } Z_{n+1}(\Omega) = \{0,1\}$$
  La formule des probabilités totales donne :
  $$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = 1) &= P(Z_n = 0) \times P(Z_{n+1} = 1 | Z_n = 0) + P(Z_n = 1) \times P(Z_{n+1} = 1 | Z_n = 1) \\ &= P(Z_n = 0) \times 0 + P(Z_n = 1) \times P(X_{n+1,1} = 1) \\ &= 0 + p^n \times p \\ &= p^{n+1} \end{aligned}$$
  $$\text{donc} \qquad Z_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(p^{n+1})$$

En conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p^n)}$ *(ce qui répond bien à la question posée).*

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Z_n = 0) = 1 - p^n$, puis comme $p \in]0,1[$ on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(Z_n = 0) = 1}$$

Q 7. Si Z_n prend la valeur 0 alors Z_{n+1} aussi, autrement dit : $(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$
ce qui entraine $P(Z_n = 0) \leqslant P(Z_{n+1} = 0)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

on sait de plus que u_n est la valeur d'une probabilité donc (u_n) est majorée par 1,
Le théorème de convergence monotone permet de conclure :

$$\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$$

Q 8.

Q 8.1. $\boxed{Z_1(\Omega) = \{0,2\},\ \ P(Z_1 = 0) = 1-p\ \text{ et }\ P(Z_1 = 2) = p}$ autrement dit : $\dfrac{Z_1}{2} \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$

On en déduit : $\boxed{E(Z_1) = 2p \quad \text{et} \quad V(Z_1) = 4p(1-p)}$

Q 8.2. La formule des probabilités totales avec le système complet $((Z_1 = 0), (Z_1 = 2))$ donne :

$$P(Z_{n+1} = 0) = P(Z_1 = 0) \times P(Z_{n+1} = 0|Z_1 = 0) + P(Z_1 = 2) \times P(Z_{n+1} = 0|Z_1 = 2)$$

avec la loi de Z_1 on obtient :

$$\boxed{P(Z_{n+1} = 0) = (1-p) \times P(Z_{n+1} = 0|Z_1 = 0) + p \times P(Z_{n+1} = 0|Z_1 = 2)}$$

Q 8.3. Si $(Z_1 = 2)$ est réalisée,

on observe la descendance de deux individus de manière indépendante.

$Z_{n+1} = 0$ est alors réalisé si au cours des n générations (de 2 à $n+1$) les deux descendances disparaissent

or u_n est la probabilité qu'une descendance disparaisse après n générations.

donc :

$$\boxed{P(Z_{n+1} = 0|Z_1 = 2) = u_n^2}$$

de plus si Z_n prend la valeur 0 donc Z_{n+1} aussi donc $P(Z_{n+1} = 0|Z_1 = 0) = 1$

on peut alors conclure avec la formule de Q.8.2 :

$$\boxed{u_{n+1} = (1-p) + pu_n^2}$$

Q 8.4. Si (u_n) converge vers ℓ en passant à la limite sur la relation précédente on obtient $\ell = (1-p) + p\ell^2$

$$\begin{array}{lrcll} \text{or} & \ell = (1-p) + p\ell^2 & \iff & p\ell^2 - \ell + (1-p) = 0 & \\ & & \iff & (\ell - 1)(p\ell - (1-p)) = 0 & \textit{(1 racine evidente)} \\ & & \iff & \ell = 1 \quad \text{ou} \quad \ell = \dfrac{1-p}{p} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Les seules limites possibles de } (u_n) \text{ sont } 1 \text{ et } \dfrac{1-p}{p}}$$

Q 8.5. On sait que (u_n) converge vers un nombre inférieur ou égal à 1,

Les seules limites possibles de (u_n) sont 1 et $\dfrac{1-p}{p}$

or lorsque $0 < p \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a : $\dfrac{1}{p} \geqslant 2$ donc $\dfrac{1-p}{p} = \dfrac{1}{p} - 1 \geqslant 1$

donc

$$\boxed{\text{Si } p \leqslant \dfrac{1}{2}, \ \text{ alors } \ (u_n) \text{ converge vers } 1}$$

Q 8.6. lorsque $\dfrac{1}{2} < p \leqslant 1$, on a : $1 \leqslant \dfrac{1}{p} < 2$ donc $\dfrac{1-p}{p} = \dfrac{1}{p} - 1 \in [0,1[$ $\boxed{\dfrac{1-p}{p} < 1}$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \dfrac{1-p}{p}$

- Pour $n = 0$,

  $u_0 = 0$ et $\dfrac{1-p}{p} \in [0,1[$ donc $u_0 \leqslant \dfrac{1-p}{p}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant \dfrac{1-p}{p}$,

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & = & (1-p) + pu_n^2 & \\ & \leqslant & (1-p) + p\dfrac{(1-p)^2}{p^2} & \\ & \leqslant & \dfrac{1-p}{p} & \textit{(ce qu'on voulait obtenir)} \end{array}$$

En conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \dfrac{1-p}{p}}$

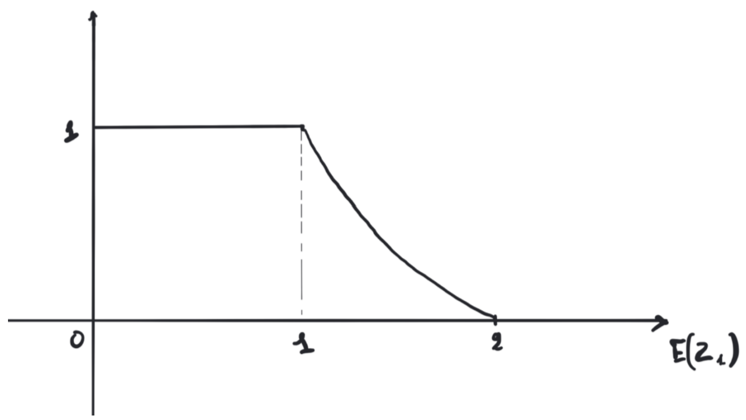
La suite (u_n) est majorée par $\dfrac{1-p}{p}$ qui est strictement inférieur à 1 donc ici elle converge vers $\dfrac{1-p}{p}$.

$$\boxed{\text{La probabilité d'extinction vaut } \dfrac{1-p}{p}}$$

Q 8.7. Sachant que $E(Z_1) = 2p$,

la probabilité d'extinction vaut : $\begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant E(Z_1) \leqslant 1 \\ \dfrac{2 - E(Z_1)}{E(Z1)} & \text{si} \quad 1 \leqslant E(Z_1) \leqslant 2 \end{cases}$

Ce qui donne la courbe suivante :



La lignée s'éteint si, et seulement si, $E(Z_1) \leqslant 1$

Q 9.

Q 9.1. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet $((Z_1 = k))_{k\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k) \times P_{(Z_1=k)}(Z_{n+1} = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} p^k(1-p) \times u_n^k \\ &= (1-p) \sum_{k=0}^{+\infty} (pu_n)^k \\ &= (1-p) \times \frac{1}{1 - pu_n} \qquad \textit{(série géométrique de raison } pu_n \in [0,1[\textit{ car } p < 1\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1-p}{1-pu_n}}$$

Q 9.2. Pour $\ell \in [0,1]$, $\ p\ell \neq 1$,

$$\begin{aligned} \ell = \frac{1-p}{1-p\ell} &\iff \ell - p\ell^2 = 1 - p \\ &\iff p\ell^2 - \ell + (1-p) = 0 \\ &\iff \ell = 1 \quad \text{ou} \quad \ell = \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

On se retrouve dans la situation de la question Q.8.

$$\boxed{\text{si } p \leqslant \tfrac{1}{2}, \text{ la probabilité d'extinction vaut 1 sinon elle vaut } \dfrac{1-p}{p}}$$

Q 9.3. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
et $P(Y+1=k) = P(Y=k-1) = (1-p)p^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\boxed{Y+1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 1-p}$$

on en déduit que $E(Y)+1 = \frac{1}{(}1-p)$ donc $E(Y) = \dfrac{p}{1-p}$

$$\begin{aligned}
\text{la probabilité d'extinction vaut 1} \quad &\iff \quad p \leqslant \frac{1}{2} \\
&\iff \quad \frac{1-p}{p} \geqslant 1 \qquad\qquad \textit{Raisonnement fait en Q.8} \\
&\iff \quad \frac{p}{1-p} \leqslant 1 \\
&\iff \quad E(Y) \leqslant 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'extinction vaut 1 si, et seulement si, } E(Y) \leqslant 1}$$

Interprétation : La population ne s'éteint pas si et seulement si en moyenne un individu engendre strictement plus qu'un individu.

Partie II

Q 10.

Q 10.1. `lambda_` correspond au paramètre de la loi de Poisson et `n` le numéro de la génération.

Q 10.2. • Les lignes 11 et 12 permettent d'interrompre la boucle `for` si la population s'éteint.
• La ligne 2 initialise la variable `population` avec un tableau unidimensionnel `numpy` contenant $n+1$ zéros.
• Les lignes 6, 7 et 8 permettent d'affecter à `descendants` la somme de n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Q 10.3. *Stabilité des lois de Poisson* :
La somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ est une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{P}(n\lambda)$
C'est cette propriété qui justifie que l'on peut remplacer les lignes 6, 7 et 8 par
`descendants = rd.poisson(Z*lambda_)`

Q 11.

Q 11.1.

```
lambda_ = 0.7
for k in range(10):
    plt.plot(galton_watson(lambda_, 20))
```

Q 11.2. Pour $\lambda < 1$, sur les simulations données disparaissent et elles résistent pour $\lambda > 1$.

$$\boxed{\text{Conjecture : La probabilité d'extinction vaut 1 si, et seulement si, } \lambda \leqslant 1.}$$

Q 12.

Q 12.1.

```
def galton_watson_2(lambda_,n):
    population = np.zeros(n+1)
    population[0] = 1
    Z = 1
    for i in range(1,n+1):
        descendants = rd.poisson(Z*lambda_)
        Z = descendants
        if descendants == 0:
            return 1
    return 0
```

Q 12.2. *(On utilise ici l'approximation fournie par la loi faible des grands nombres)*

```
def extinction(lambda_):
    s = 0
    for k in range(5000):
        s +=  galton_watson_2(lambda_,60)
    return s/5000
```

Q 13.

Q 13.1. Conjectures : $\lambda \longmapsto p_\lambda$ est décroissante et $p_\lambda = 1 \iff \lambda \leqslant 1$.

Q 13.2. Ces simulations sont la succession de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (succès : extinction de probabilité : p_λ) et S_n est le nombre de succès donc

$$\boxed{S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_\lambda)}$$

On sait que S_n possède une espérance $E(S_n) = np_\lambda$ et une variance $V(S_n) = np_\lambda(1-p_\lambda)$ donc $\dfrac{S_n}{n}$ possède une espérance $E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = p_\lambda$ et une variance $V\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{p_\lambda(1-p_\lambda)}{n}$

en appliquant à $\dfrac{S_n}{n}$ l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on obtient :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p_\lambda(1-p_\lambda)}{n\varepsilon^2}}$$

L'étude du polynôme $x \longmapsto x(1-x)$ montre que pour tout réel x, $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ et on en déduit :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}}$$

Q 13.3.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_n}{n} - \varepsilon \leqslant p_\lambda \leqslant \frac{S_n}{n} + \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \leqslant \varepsilon\right) \\ &= 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| > \varepsilon\right) \\ &\geqslant 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geqslant \varepsilon\right) \\ &\geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Il suffit donc de résoudre $\dfrac{1}{4n\varepsilon^2} \leqslant 0{,}05$, ce qui est équivalent à $\varepsilon \geqslant \sqrt{\dfrac{5}{n}}$

$$\boxed{\text{Pour } \varepsilon \geqslant \sqrt{\frac{5}{n}} \qquad \text{on a} \quad P\left(\frac{S_n}{n} - \varepsilon \leqslant p_\lambda \leqslant \frac{S_n}{n} + \varepsilon\right) \geqslant 0{,}95}$$

Q 13.4. *(à faire)*