

Feuille Cours_11 : Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

Théorème : *Inégalité de Markov.*

Ex 1 : Démontrer ce théorème. *Indication : Utiliser la variable aléatoire $Y = a \cdot \mathbb{1}_{X \geq a}$*

Théorème : *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

Ex 2 : Démontrer ce théorème. *Indication : Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie.*

Proposition : *Autres formulations.*

Ex 3 : Démontrer ces relations.

Théorème : *Loi faible des grands nombres.*

Vocabulaire : On dit que la moyenne empirique converge en probabilité vers l'espérance. (terme hors programme)

Ex 4 : Démontrer ce théorème. *Indication : Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à M_n .*

Corollaire : *La fréquence empirique converge (en probabilité) vers la probabilité .*

Ex 5 : Démontrer ce corollaire. *Indication : Appliquer le théorème avec des variables de Bernoulli.*

Remarque : On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode de calcul approché basée sur la loi faible des grands nombres.

Comment trouver avec un programme Python une valeur approchée d'une espérance.

Ex 6 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$; on note $Z = |X - Y|$.

Ecrire un programme Python pour trouver une valeur approchée de $E(Z)$.

Comment trouver avec un programme Python une valeur approchée d'une probabilité.

Ex 7 : On lance 6 fois un dé et on note A l'événement : "les résultats obtenus forment une suite croissante".

Ecrire un programme Python pour trouver une valeur approchée de $P(A)$.

Intervalle de confiance obtenu avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Ex 8 : Une élection oppose deux candidats A et B . On étudie un échantillon de taille n et on note f_n la proportion de sondés qui vote pour A .

On cherche à estimer p la proportion des électeurs souhaitant voter pour A .

- 1) On fait un premier sondage de taille $n = 100$ et on trouve $f_{100} = 52\%$, estimer p à l'aide d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95%.
- 2) On fait un deuxième sondage de taille $n = 10000$ et on trouve $f_{10000} = 52\%$, estimer p à l'aide d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95%.