Table des matières

1 Généralités **2**
1.1 Définitions . . . 2
1.1.1 Ecriture matricielle. . . . 2
1.2 Propriétés . . . 3
1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz. . . . 3
1.4 Vecteurs orthogonaux . . . 4
1.5 Théorème de Pythagore . . . 4

2 Bases orthogonales. **5**

3 Bases orthonormales. **6**
3.1 Définition. . . . 6
3.2 Propriétés. . . . 7

4 Matrice symétrique réelle. **8**
4.1 Orthogonalité des vecteurs propres. . . . 8
4.2 Théorème spectral . . . 8

5 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel **10**
5.1 Définition. . . . 10
5.2 Propriétés. . . . 10
5.3 Décomposition. . . . 11

6 Projection orthogonale. **12**
6.1 Définition. . . . 12
6.2 Propriétés. . . . 12
6.2.1 Ecriture avec une base orthonormale. . . . 13
6.3 Diagonalisation. (Complément) . . . 13

7 Distance. **14**
7.1 Définitions. . . . 14
7.2 Lien entre distance et projeté orthogonal. . . . 14
7.3 Cas particulier. (complément) . . . 15
7.4 Ajustement affine par la méthode des moindres carrés. . . . 15

1 Généralités

n désigne ici un entier naturel non nul. On note $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1.1 Définitions

Définition. *(Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$)*

Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui

à tout couple $\big((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)\big)$ associe le réel : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$

Pour $u = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $v = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ on note : $< u\,;\, v >$ le produit scalaire de u et v.

$$< u\,;\, v > = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

Remarque : on parle aussi de produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

Définition. (*Norme euclidienne*)

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on appelle norme *(euclidienne)* de u le réel noté $||u||$ et défini par :

$$||u|| = \sqrt{< u\,;\, u >}$$

$$||u||^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad\qquad ||u|| \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

1.1.1 Ecriture matricielle.

Proposition.

Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $X = \mathrm{C}oord_{\mathscr{B}_c}(u)$ et $Y = \mathrm{C}oord_{\mathscr{B}_c}(v)$,

$$< u\,;\, v > = \; X^\top Y \qquad\qquad ||u||^2 = X^\top X$$

Remarque : On confond ici $\mathbb{R}$ et $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$.

Proposition. *(complément)*

❶ Soient $(u_1, \cdots, u_p)$ et $(v_1, ..., v_m)$ deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$,
en notant $A = Mat_{\mathscr{B}_c}(u_1, \cdots, u_p)$, $B = Mat_{\mathscr{B}_c}(v_1, \cdots, v_m)$.
$A^\top B$ est la matrice de $\mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ définie par : $(A^\top B)_{i,j} = < u_i ; v_j >$

❷ Soient $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,
en notant : $C_1, ..., C_p$ les colonnes de M, $C'_1, ..., C'_m$ les colonnes de N.

$M^\top N$ est la matrice de $\mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ définie par : $(M^\top N)_{i,j} = C_i^\top C'_j$

1.2 Propriétés

On note $E = \mathbb{R}^n$,

Proposition

❶ *Bilinéarité.*

$$\forall (u_1, u_2, v) \in E^3,\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad < au_1 + bu_2\,;\, v > = \ a < u_1\,;\, v > + b < u_2\,;\, v >$$

$$\forall (u, v_1, v_2) \in E^3,\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad < u\,;\, av_1 + bv_2 > = \ a < u\,;\, v_1 > + b < u\,;\, v_2 >$$

❷ *Symétrie.*

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad < u\,; v > = < v\,;\, u >$$

❸ *Définie.*

$$\forall u \in E, \quad < u\,; u > = 0 \iff u = 0_E$$

❹ *Positive.*

$$\forall u \in E, \quad < u\,; u > \geqslant \ 0$$

Démonstration. *(voir feuille cours_12)*

Remarque : $\forall u \in E, \quad < u\,;\, 0_E > = \ 0$ et $< 0_E\,;\, u > = \ 0$

Théorème.

❶ $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall u \in E, \quad ||au|| = |a|\,||u||$ ❷ $\forall (u,v) \in E^2, \quad ||u+v|| \ \leqslant \ ||u|| + ||v||$

Démonstration. *(voir feuille cours_12)*

Proposition.

❶ $\forall (u,v) \in E^2, \quad ||u+v||^2 = ||u||^2 + 2 < u\,; v > \ + ||v||^2$

❷ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (u,v) \in E^2, \quad ||au+bv||^2 = a^2||u||^2 + 2ab < u\,; v > \ + b^2||v||^2$

En effet :

Proposition. *Complément*

$$\forall (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in E^p, \quad \left|\left| \sum_{i=1}^{p} u_i \right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{p} ||u_i||^2 \ + \ 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} < u_i ; u_j >$$

Remarque. *Faire le lien avec le complément donnant la variance d'une somme de variables aléatoires.*

1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème.

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad < u\,; v >^2 \leqslant \ ||u||^2\,||v||^2$$

Démonstration. *(voir feuille cours_12)*

Autre formulation.

$$|< u\,; v >| \ \leqslant \ ||u||\,||v|| \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \qquad (X^\top Y)^2 \leqslant X^\top X\, Y^\top Y$$

Théorème. (*cas d'égalité*)

$$\forall (u,v) \in E^2, \qquad < u\,; v >^2 = \ ||u||^2\,||v||^2 \iff u \text{ et } v \text{ sont colinéaires}$$

Démonstration. *(voir feuille cours_12)*

1.4 Vecteurs orthogonaux

Définition

Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, Dire que u et v sont orthogonaux si, et seulement si, $< u\,;\, v >= 0$

Remarques :

- On pourra noter $u \perp v$.
- On définit de même la notion de matrices colonnes orthogonales :

$$\text{"}X \text{ et } Y \text{ de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ sont orthogonales" signifie que } X^\top Y = 0$$

1.5 Théorème de Pythagore

Théorème.

Pour tout $(u, v) \in E^2$, u et v sont orthogonaux si, et seulement si, $\|\|u + v\|\|^2 = \|\|u\|\|^2 + \|\|v\|\|^2$

Démonstration. *(voir feuille cours_12)*

Illustration graphique.

Théorème.

Soient p un entier naturel non nul et $u_1, u_2, ..., u_p$ des vecteurs de E, Si les u_i sont 2 à 2 orthogonaux alors, $\left\|\left\|\sum_{i=1}^{p} u_i\right\|\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|\|u_i\|\|^2$

Démonstration. *(voir feuille cours_12)*

Remarques.

❶ Si ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$

❷ Si u et v sont orthogonaux alors $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$

❸ Si les u_i sont 2 à 2 orthogonaux alors, $\left|\left|\sum_{i=1}^{p} u_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{p} ||u_i||^2$

- Les réciproques des implications ❶ et ❷ sont vraies, mais pas celle de ❸ .

Exercice : Trouver un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ montrons que la réciproque de ❸ est fausse.

2

Bases orthogonales.

Définition.

Soient p un entier naturel non nul et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$,

Dire que $(u_1, ..., u_p)$ est **une famille orthogonale** signifie que :

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2, \quad i \neq j \implies < u_i\,;\, u_j > = 0$$

Remarques :

- On dira aussi "Les u_i sont deux à deux orthogonaux".
- On définit de même un famille orthogonale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- Il suffit d'avoir : $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2, \quad i < j \implies < u_i\,;\, u_j > = 0$
- *(complément)*
  En notant A la matrice de p vecteurs $(u_1, ..., u_p)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$,

  $(u_1, ..., u_p)$ est une famille orthogonale si, et seulement si $A^\top A$ est diagonale

Théorème.

Soient p un entier naturel non nul et $(u_1, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$,

Si $(u_1, ..., u_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** alors elle est libre.

Démonstration. *(Voir feuille cours_12_bis)*

3

Bases orthonormales.

3.1 Définition.

Définition.

Soient p un entier naturel non nul et $(u_1, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$,
Dire que $(u_1, ..., u_p)$ est **une famille orthonormale** signifie que :

$$\forall i \in [\![1; p]\!], \quad ||u_i|| = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall (i,j) \in [\![1; p]\!]^2, \quad i \neq j \implies < u_i\,; u_j > = 0$$

Remarques :

- Une famille orthonormale est en particulier une famille orthogonale de vecteurs non nuls, elle est donc libre.
- Une famille orthonormale de p vecteurs d'un sous-espace F de dimension p est une base de F.
- On définit de même une famille orthonormale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
- En notant P la matrice de n vecteurs $(u_1, ..., u_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$,

$$(u_1, ..., u_n) \text{ est une base orthonormale si, et seulement si } \quad P^\top P = I_n$$

- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
Les colonnes de M forment une famille orthonormale
si, et seulement si, $\quad M$ est inversible et $M^{-1} = M^\top$

Proposition.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(v_1, ..., v_p)$ une famille de p vecteurs d'une sous-espace vectoriel F de E,
Si $(v_1, ..., v_p)$ est une famille orthogonale et si les v_i sont **non nuls**
alors $\left(\dfrac{v_1}{||v_1||}, ... , \dfrac{v_p}{||v_p||} \right)$ est une famille orthonormale de vecteurs de F.

Théorème.

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ possède une base orthonormale.

Démonstration. *(Voir feuille cours_12_bis)*

En pratique. On commence par trouver une base orthogonale, ensuite on norme chaque vecteur de la famille.

3.2 Propriétés.

Le produit scalaire et la norme se calculent de la même manière dans toutes les bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$.

Théorème

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, u un vecteur de F et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de F.

$$\text{Si } \mathscr{B} \text{ est une base orthonormale de } F \text{ alors } \quad \operatorname{coord}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} < u\,;\,e_1 > \\ \vdots \\ < u\,;\,e_p > \end{pmatrix}$$

Démonstration. *(Voir feuille cours_12_bis)*

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$, $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

1. Justifier que $\mathscr{B} = (u, v)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur quelconque (x, y) de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathscr{B}$
3. Illustrer graphiquement le résultat précédent en prenant $(x, y) = (2, 1)$

Théorème

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, u et v deux vecteurs de F et $\mathscr{B}$ une base de F.

$$\text{on note : } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \operatorname{coord}_{\mathscr{B}}(u) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \operatorname{coord}_{\mathscr{B}}(v)$$

Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de F alors

$$< u\,;\,v > = \sum_{i=1}^{p} x_i\, y_i \qquad ||u|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}$$

Démonstration. *(Voir feuille cours_12_bis)*

Théorème.

Si P est la matrice de passage entre deux bases orthonormales alors P est inversible et $P^{-1} = P^{\top}$

4 Matrice symétrique réelle.

4.1 Orthogonalité des vecteurs propres.

Théorème.

Soient n un entier naturel non nul, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(X_1, X_2) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Si} \begin{cases} A \text{ est symétrique} \\ X_1 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associée à } \lambda_1 \\ X_2 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associée à } \lambda_2 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \quad \text{alors} \quad X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont orthogonales.}$$

Démonstration.

Rappel : A symétrique signifie que $A^\top = A$, lire : "transposée de A égale A".

Corollaire.

Soient n un entier naturel non nul, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(X_1, X_2) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Si A est symétrique , $X_1 \in E_{\lambda_1}(A)$, $X_2 \in E_{\lambda_2}(A)$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors X_1 et X_2 sont orthogonales.

Autrement dit : Les sous-espaces propres d'une matrice réelle symétrique sont deux à deux orthogonaux.

4.2 Théorème spectral

Théorème.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
Si M est symétrique alors il existe deux matrices $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\Delta \text{ diagonale}, \quad P \text{ inversible}, \quad P^{-1} = P^\top \quad \text{et} \quad M = P\Delta\, P^\top$$

Démonstration. *(admis)*

Remarques :

- Si M est symétrique et réelle alors M possède une base orthonormale de vecteurs propres.
- "P inversible, $P^{-1} = P^{\top}$" équivaut à "les colonnes de P forment une base orthonormale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ "
- Une matrice symétrique réelle est non seulement diagonalisable, mais on peut trouver, **parmi toutes les bases de vecteurs propres**, une base orthonormale.
- Si A est une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes
  alors toutes les bases de vecteurs propres de A sont orthogonales.

Autre formulation du théorème.

Si M est une matrice réelle symétrique

alors l'endomorphisme $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$ est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ce qu'on simplifie par :

Si M est une matrice réelle symétrique alors elle est diagonalisable dans une base orthonormale.

En pratique. *(Voir la feuille Exo_26)*

Pour diagonaliser une matrice réelle symétrique M dans une base orthonormale :

❶ "La matrice M est symétrique réelle donc M est diagonalisable".

❷ On détermine le spectre de M.

❸ On détermine une base de chaque sous-espace propre. (*la somme des dimensions est égale à n*).

❹ **1er cas** : M a n valeurs propres distinctes.

Pour chaque valeur on détermine un vecteur propre.

On a alors $(X_1, \cdots, X_n)$ une base orthogonale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M.

*(Cette affirmation est justifiée par le corollaire de **4.1**)*

2ème cas : M a au moins un sous espace propre de dimension supérieure ou égale à 2.

On détermine une base orthogonale de chaque sous-espace propre.

En juxtaposant toutes ces bases,

on obtient $(X_1, \cdots, X_n)$ une base orthogonale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M.

(Cette affirmation est justifiée par le corollaire ci-dessus)

❺ Il reste à normer les vecteurs :

En prenant $(C_1, \cdots, C_n) = \left(\dfrac{X_1}{||X_1||}, ..., \dfrac{X_n}{||X_n||} \right)$

La famille $(C_1, \cdots, C_n)$ est une base orthonormale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M.

Autrement dit :

- en notant P la matrice dont les colonnes sont $C_1, \cdots, C_n$,

$$\underbrace{P \text{ inversible} \quad \text{et} \quad P^{-1} = P^{\top}}_{\text{c'est une base orthonormale}} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{P^{-1}MP \quad \text{est diagonale}}_{\text{de vecteurs propres de } M}$$

- On note pour chaque i, λ_i la valeur propre associée à C_i.

en notant P la matrice dont les colonnes sont $C_1, \cdots, C_n$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\underbrace{P \text{ inversible} \quad \text{et} \quad P^{-1} = P^{\top}}_{\text{c'est une base orthonormale}} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{M \;=\; PDP^{-1}}_{\text{de vecteurs propres de } M}$$

5 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

On note $E = \mathbb{R}^n$

5.1 Définition.

Définition.

Soit F un sous espace vectoriel de E, on définit $F^\perp$ (*l'orthogonal de* F) par :

$$F^\perp = \{ \ u \in E \mid \quad \forall v \in F, \ < u\,;\, v >= 0 \ \}$$

Remarques : ❶ $E^\perp = \{0_E\}$ ❷ $\{0_E\}^\perp = E$

❸ C'est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F.

5.2 Propriétés.

Propositions.

Soit F un sous espace vectoriel de E, (on note $(e_1, ..., e_m)$ une base de F)

❶ $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

❷ $F \cap F^\perp = \{0_E\}$

❸ quel que soit $x \in E$, $\quad x \in F^\perp \iff \forall i \in [\![1, m]\!], \quad x \perp e_i$

❹ $\dim(F) + \dim\left(F^\perp\right) = n$

❺ $\left(F^\perp\right)^\perp = F$

Démonstration. *(Feuille Cours_12_ter)*

Proposition. *(Un cas particulier)*

Soit $v = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(\text{Vect} < v >)^\perp = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ \middle| \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

Faire le lien avec la notion de vecteur normal d'un droite du plan ou d'un plan de l'espace. Ou encore avec l'exercice 3 du DS3 et les hyperplans.

Exemples dans $\mathbb{R}^3$:

$$(\text{Vect} < (1, 2, -4) >)^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 4z = 0 \ \}$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3z = 0 \ \}^\perp = \text{Vect} < (2, 0, -3) >$$

5.3 Décomposition.

Théorème

> Soit F un sous espace vectoriel de E,
> quel que soit $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ vérifiant $x = x_F + x_{F^\perp}$

Démonstration. *(Feuille Cours_12_ter)*

Définition :

Pour chaque x dans E, l'unique x_F est noté $p_F(x)$ et est appelé **projeté orthogonal** de x sur F.

$$x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp}$$

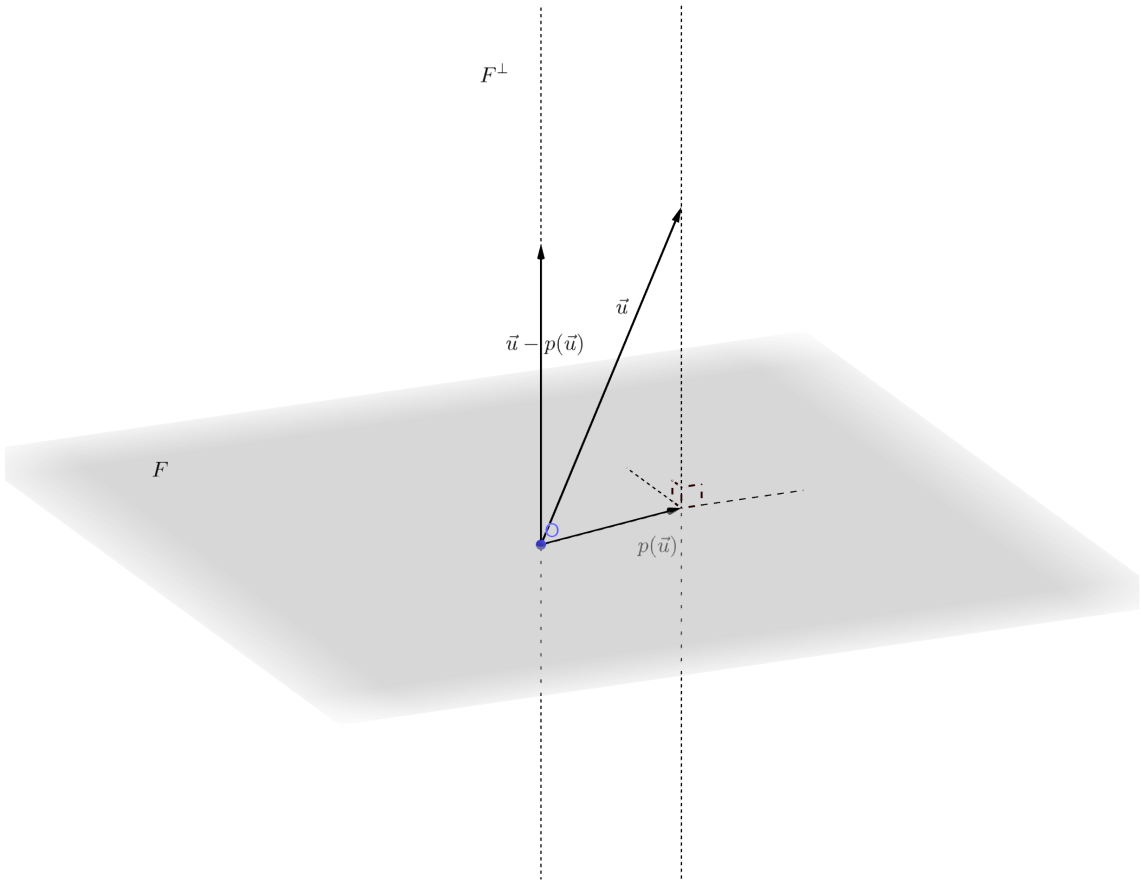
Remarques :

❶ $p_F(x)$ est l'unique vecteur v de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $v \in F$ et $x - v \in F^\perp$.

❷ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$

❸ En particulier $x - p_F(x) \perp p_F(x)$, ce qui entraîne : $||x - p_F(x)||^2 + ||p_F(x)||^2 = ||x||^2$.

❹ $\forall x \in F$, $p_F(x) = x$ et $\forall x \in F^\perp$, $p_F(x) = 0_E$



Proposition.

> Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,
> Si $\mathscr{B}_1$ est une base orthonormale de F et $\mathscr{B}_2$ est une base orthonormale de $F^\perp$
> alors en juxtaposant ces deux bases on obtient $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

Remarque *(à savoir démontrer)* :

> Si $\mathscr{B}_1$ est une base de F et $\mathscr{B}_2$ est une base de $F^\perp$
> alors en juxtaposant ces deux bases on obtient $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

6 Projection orthogonale.

6.1 Définition.

Définition. *(La projection orthogonale sur F).*

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,
on définit la projection orthogonale comme l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur u associe u_F où $(u_F, u_{F^\perp})$ est l'unique couple de $F \times F^\perp$ tel que $u = u_F + u_{F^\perp}$

$$p_F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ u & \longmapsto & u_F \end{array} \qquad \text{où} \quad u = \underbrace{u_F}_{\in F} + \underbrace{u_{F^\perp}}_{\in F^\perp}$$

Remarques.

- Autrement dit :

$$p_F(u) \text{ est l'unique vecteur de } F \text{ vérifiant } u - p_F(u) \in F^\perp$$

- *Caractérisation* : Soit $u \in E$,
  Le projeté orthogonal de u sur F est l'unique $v \in E$, vérifiant $v \in F$ et $u - v \in F^\perp$
- Si $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in F^\perp}$ alors $p_F(u) = v$
- Si $F = \mathbb{R}^n$ alors $p_F = \mathrm{Id}_E$ Si $F = \{0_E\}$ alors la p_F est l'endomorphisme nul.

6.2 Propriétés.

Théorème.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,
la projection orthogonale sur F est l'endomorphisme p_F de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

❶ $p_F \circ p_F = p_F$.
❷ $\ker(p_F)$ est égal à $F^\perp$.
❸ $\mathrm{Im}(p_F)$ est égal à F.

Démonstrations. *(Feuille Cours_12_ter)*

Remarques :

- En notant $M = Mat_{\mathscr{B}}(p_F)$ *(matrice dans une base quelconque)*, on a : $M^2 = M$.
- Le théorème du rang redonne :

$$\dim(F) + \dim\left(F^\perp\right) = n$$

- $\ker(p_F)^\perp = \mathrm{Im}(p_F)$ et $\mathrm{Im}(p_F)^\perp = \ker(p_F)$

6.2.1 Ecriture avec une base orthonormale.

Théorème.

> Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, ..., e_m)$ une base orthonormale de F.
>
> La projection orthogonale sur F est définie par : $\quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad p_F(u) = \sum_{k=1}^{m} <u\,;\,e_k>\ e_k$

Démonstration. *(Feuille Cours_12_ter)*

Remarques :

- Pour définir la projection orthogonale de F il suffit de connaître une base orthonormale de F.
- On utilise ce théorème pour (*entre autres*) déterminer la matrice de p_F dans la base canonique.
- Attention : dans une base **orthogonale** de F la formule est différente :
  Pour $(e_1, ..., e_m)$ une base orthogonale de F

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad p_F(u) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{||e_k||^2} <u\,;\,e_k>\ e_k$$

(On sera amené à utiliser cette formule)

Corollaire. *(Projection sur une droite vectorielle).*

> Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, on note $F = \text{vect}(v)$ *(La droite vectorielle dirigée par v)*
>
> La projection orthogonale sur F est définie par : $\quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad p_F(u) = \dfrac{<u\,;\,v>}{||v||^2}\, v$

En effet :

6.3 Diagonalisation. (Complément)

Propositions.

> Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note p_F la projection orthogonale sur F.
>
> ❶ $\text{sp}(p_F) \subset \{0\,,1\}$.
>
> ❷ $E_0(p_F) = \ker(p_F) = F^{\perp}$ et $E_1(p_F) = \text{Im}(p_F) = F$
>
> ❸ p_F est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
>
> ❹ $Mat_{B_c}(p_F)$ est semblable à la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$
>
> ❺ $Mat_{B_c}(p_F)$ est une matrice symétrique.
>
> ❻ La trace de $Mat_{B_c}(p_F)$ est égale à son rang, qui est égal à la dimension de F.

Démonstrations. *(Feuille Cours_12_ter)*

7 Distance.

7.1 Définitions.

Définition. *Distance entre deux vecteurs.*

> Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$,
> on appelle distance *(euclidienne)* entre u et v le réel $||u-v||$.

Remarque :

Si $\mathscr{B}$ est orthonormale et si $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{coord}_{\mathscr{B}}(u)$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \text{coord}_{\mathscr{B}}(v)$ alors $||u-v|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

Propriétés :

> Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$,
> ❶ $d(u,v) \geqslant 0$. ❷ $d(u,v) = d(v,u)$. ❸ $d(u,v) = 0 \iff u = v$. ❹ $d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$

Définition. *Distance d'un vecteur à une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.*

> Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et S une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.
> On appelle distance de u à S le réel : $\inf(\{d(u,v) \mid v \in S\})$
> *(on notera $d(u,S)$ ce réel)*

Revoir la définition d'une borne inférieure et le théorème de la borne supérieure dasn $\mathbb{R}$.

Quand l'ensemble $\{d(u,v) \mid v \in S\}$ possède un plus petit élément, *(ie : $\exists v \in S : d(u,v) = d(u,S)$)*, on note

$$d(u,S) = \min(\{d(u,v) \mid v \in S\})$$

7.2 Lien entre distance et projeté orthogonal.

Théorème.

> Si F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ alors $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $d(u,F) = ||u - p_F(u)||$

Démonstration. *(Feuille cours_12_quater)*

Illustration graphique.

Remarques :

Pour u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,

- $d(u,F) = ||p_{F^\perp}(u)||$
- $p_F(u)$ est le vecteur de F réalisant le minimum sur F de la fonction $v \longmapsto d(u,v)$.
- Pour tout $v \in F$, $\quad d(u, p_F(u)) \leqslant d(u,v)$, ou encore $||u - p_F(u)|| = ||u - v||$
- Ici l'ensemble $\{d(u,v) \mid v \in F\}$ admet un plus petit élément, $\quad d(u,F) = \min(\{d(u,v) \mid v \in F\})$.

7.3 Cas particulier. (complément)

Proposition. *(Distance d'un vecteur à un plan de $\mathbb{R}^3$).*

Soit n un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, on note $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \perp n\}$ *(Le plan de vecteur normal n)*

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad d(u,F) = \frac{|<u\,;\,n>|}{||n||}$$

En effet :

7.4 Ajustement affine par la méthode des moindres carrés.

Une expérience donne une série statistique double sous la forme de deux listes :

$$x = (x_1, ..., x_n) \qquad \text{et} \qquad y = (y_1, ..., y_n).$$

on note : $u = (1, ..., 1)$ et F l'espace engendré par u et x. (*on suppose que la famille* (u,x) *est libre*)

Les éléments de F sont les listes $z = (z_1, ..., z_n)$ telles que le nuage de points $M_k(x_k, z_k)$ est sur une droite.
L'ajustement affine par la méthode des moindres carrées revient à :

- déterminer dans F quelle est la liste la plus proche de y.
- déterminer y_0 dans F tel que $d(y, y_0) = d(y, F)$.
- déterminer le projeté orthogonal de y sur F.

$p_F(y)$ est un vecteur de F, on note (a_0, b_0) ses coordonnées dans la base (u,x),

$$p_F(y) = a_0 u + b_0 x = (a_0 + b_0 x_1\,,\,...\,,\,a_0 + b_0 x_n)$$

On appelle **droite de régression linéaire de y en x** la droite d'équation : $y = a_0 + b_0 x$

Voir le sujet MMI 2017 vu en TD informatique, la feuille Cours_12_quater.

Théorème.

Soient $y = (y_1, ..., y_n)$, $u = (1, ..., 1)$ et $x = (x_1, ..., x_n)$ tels que (u,x) est une famille libre,
on note F le plan $\text{vect}(u,x)$.

Le projeté orthogonal de y sur F est : $\left(\overline{y} - \left(\dfrac{cov(x,y)}{\sigma_x^2}\right)\overline{x}\right) u + \dfrac{cov(x,y)}{\sigma_x^2}\, x$

$$\text{où} \quad cov(x,y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\,\overline{y} \qquad \text{et} \qquad \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$$

Démonstration. *Voir l'exercice **Ex 4** de la feuille Cours_12_quater.*

Remarque : Comme nous l'avons fait dans un autre chapitre cela revient à minimiser la fonction :

$$f : (a,b) \longmapsto ||y - (au + bx)||^2 \qquad = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))^2$$

Voir la fin de la feuille Cours_12_quater.