

Table des matières

1 Généralités	2
1.1 Définitions	2
1.1.1 Produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^n	2
1.1.2 Norme euclidienne sur \mathbb{R}^n	2
1.1.3 Ecriture matricielle.	2
1.2 Propriétés	3
1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz.	4
1.4 Inégalité triangulaire.	5
1.5 Vecteurs orthogonaux	5
1.6 Théorème de Pythagore	6
2 Bases orthonormales.	7
2.1 Famille orthogonale de vecteurs non nuls	7
2.2 Définition.	7
2.3 Coordonnées dans une base orthonormale.	8
2.4 Expression du produit scalaire dans une base orthonormale.	9
3 Matrice symétrique réelle.	11
3.1 Orthogonalité des vecteurs propres.	11
3.2 Théorème spectral	12
4 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel	13
4.1 Définition.	13
4.2 Propriétés.	13
4.3 Décomposition.	15
5 Projection orthogonale.	16
5.1 Définition.	16
5.2 Caractérisation.	16
5.2.1 Ecriture avec une base orthonormale.	17
6 Distance.	18
6.1 Définitions.	18
6.2 Lien entre distance et projeté orthogonal.	18
6.3 Cas particulier. (complément)	19
6.4 Ajustement affine par la méthode des moindres carrés.	19

Généralités

n désigne ici un entier naturel non nul. On note \mathcal{B}_c la base canonique de \mathbb{R}^n .

1.1 Définitions

1.1.1 Produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^n

Définition.

Le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n est l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} qui à tout couple $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$ associe le réel : $\sum_{i=1}^n x_i y_i$

Pour $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on note : $\langle u; v \rangle$ le produit scalaire de u et v .

$$\langle u; v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Remarque : on parle aussi de produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

1.1.2 Norme euclidienne sur \mathbb{R}^n

Définition.

Soit u un vecteur de \mathbb{R}^n , on appelle norme (*euclidienne*) de u le réel noté $\|u\|$ et défini par :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u; u \rangle}$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Remarque : nous avons vu d'autres normes en DS et en exercices.

1.1.3 Ecriture matricielle.

Proposition.

Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^n , on note $X = \text{Coord}_{\mathcal{B}_c}(u)$ et $Y = \text{Coord}_{\mathcal{B}_c}(v)$,

$$\langle u; v \rangle = X^T Y \quad \|u\|^2 = X^T X$$

Remarque : On confond ici \mathbb{R} et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Proposition. (complément)

- ❶ Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,
 en notant : C_1, \dots, C_p les colonnes de A , C'_1, \dots, C'_m les colonnes de B .
 $A^\top B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ définie par : $(A^\top B)_{i,j} = C_i^\top C'_j$
- ❷ Soient (u_1, \dots, u_p) et (v_1, \dots, v_m) deux familles de vecteurs de \mathbb{R}^n ,
 en notant $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_e}(u_1, \dots, u_p)$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_e}(v_1, \dots, v_m)$.
 $A^\top B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ définie par : $(A^\top B)_{i,j} = \langle u_i; v_j \rangle$

Autrement dit : Le produit matriciel $A^\top B$ est la matrice dont les coefficients sont les produits scalaires des colonnes de A par les colonnes de B .

En effet : $(A^\top B)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (A^\top)_{i,k} (B)_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n n(C_i)_k (C'_j)_k = C_i^\top C'_j$

1.2 Propriétés

On note $E = \mathbb{R}^n$,

Proposition

❶ *Bilinéarité.*

$$\forall (u_1, u_2, v) \in E^3, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \langle au_1 + bu_2; v \rangle = a \langle u_1; v \rangle + b \langle u_2; v \rangle$$

$$\forall (u, v_1, v_2) \in E^3, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \langle u; av_1 + bv_2 \rangle = a \langle u; v_1 \rangle + b \langle u; v_2 \rangle$$

❷ *Symétrie.*

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle u; v \rangle = \langle v; u \rangle$$

❸ *Définie.*

$$\forall u \in E, \quad \langle u; u \rangle = 0 \iff u = 0_E$$

❹ *Positive.*

$$\forall u \in E, \quad \langle u; u \rangle \geq 0$$

Démonstration.

Pour ❶ en notant $\text{coord}_{\mathcal{B}_e}(u) = X$, $\text{coord}_{\mathcal{B}_e}(v) = Y$ et $\text{coord}_{\mathcal{B}_e}(w) = Z$,

$$\begin{aligned} \langle \alpha u + \beta v; w \rangle &= (\alpha X + \beta Y)^\top Z \\ &= (\alpha X^\top + \beta Y^\top) Z \\ &= \alpha X^\top Z + \beta Y^\top Z \\ &= \alpha \langle u; w \rangle + \beta \langle v; w \rangle \end{aligned}$$

Remarques :

- $\forall u \in E, \langle u; 0_E \rangle = 0$ et $\langle 0_E; u \rangle = 0$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \|au\| = |a| \|u\|$

Proposition.

❶ $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2 \langle u; v \rangle + \|v\|^2$

❷ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in E^2, \|au + bv\|^2 = a^2 \|u\|^2 + 2ab \langle u; v \rangle + b^2 \|v\|^2$

En effet :

Soit $(u, v) \in E^2$,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v; u + v \rangle \\ &= \langle u; u + v \rangle + \langle v; u + v \rangle \\ &= \langle u; u \rangle + \langle u; v \rangle + \langle v; u \rangle + \langle v; v \rangle \\ &= \langle u; u \rangle + 2 \langle u; v \rangle + \langle v; v \rangle \end{aligned}$$

Proposition. Complément

$$\forall (u_i)_{1 \leq i \leq p} \in E^p, \quad \left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \langle u_i; u_j \rangle$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^p u_i ; \sum_{j=1}^p u_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^p \left\langle u_i ; \sum_{j=1}^p u_j \right\rangle && \text{linéarité par rapport au premier vecteur} \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle u_i ; u_j \rangle && \text{linéarité par rapport au deuxième vecteur} \\ &= \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \langle u_i ; u_j \rangle && \text{symétrie.} \end{aligned}$$

Remarque. Faire le lien avec le complément donnant la variance d'une somme de variables aléatoires.

1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème.

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle u ; v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

Démonstration.

Pour $u = 0_E$ l'inégalité est vérifiée, il suffit de le montrer en supposant $u \neq 0_E$.

On définit $P(x) = \|xu + v\|^2$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(x) &= \|xu + v\|^2 \\ &= \langle xu + v | xu + v \rangle \\ &= x \langle u | xu + v \rangle + \langle v | xu + v \rangle \\ &= x^2 \langle u | u \rangle + x \langle u | v \rangle + x \langle v | u \rangle + \langle v | v \rangle \\ &= x^2 \|u\|^2 + 2x \langle u | v \rangle + \|v\|^2 \end{aligned}$$

le discriminant de ce trinôme est égal à : $\Delta = 4 \langle u | v \rangle^2 - 4 \|u\|^2 \|v\|^2$

de plus $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \|xu + v\|^2$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$

et ainsi le trinôme P n'a pas deux racines réelles distinctes ce qui entraîne que $\Delta \leq 0$, on en déduit bien :

$$\langle u | v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

■

Autre formulation.

$$|\langle u ; v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (X^T Y)^2 \leq X^T X Y^T Y$$

Théorème. (cas d'égalité)

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle u ; v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \iff u \text{ et } v \text{ sont colinéaires}$$

Démonstration. Pour $u = 0_E$ l'équivalence est vérifiée, il suffit de la démontrer en supposant $u \neq 0_E$.

(on reprend les notations de la démonstration précédente)

$$\begin{aligned}
 \langle u | v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 & \text{ si, et seulement si, } & \text{Le discriminant de } P \text{ est nul} \\
 & \text{si, et seulement si, } & P \text{ possède une unique racine réelle} \\
 & \iff & \exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad P(\lambda) = 0 \\
 & \iff & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad P(\lambda) = 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0 \\
 & \iff & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda u + v\|^2 = 0 \\
 & \iff & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad v = -\lambda u
 \end{aligned}$$

et comme $u \neq 0_E$, $\langle u | v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$ si, et seulement si, u et v sont colinéaires.

1.4 Inégalité triangulaire.

Théorème.

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \|u + v\|^2 &= \langle u + v | u + v \rangle \\
 &= \|u\|^2 + 2 \langle u | v \rangle + \|v\|^2 \\
 &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 && \text{d'après Cauchy-Schwarz} \\
 &\leq (\|u\| + \|v\|)^2
 \end{aligned}$$

or $\|u + v\| \geq 0$ et $\|u\| + \|v\| \geq 0$ donc (Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$, si $a^2 \leq b^2$ alors $a \leq b$)

on a bien : $\forall (u, v) \in E^2, \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ ■

Théorème. (cas d'égalité)

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \|u + v\| = \|u\| + \|v\| \iff u = 0_E \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad v = \lambda u$$

Démonstration.

\Leftarrow si $u = 0_E$ c'est immédiat, si $v = \lambda u$ avec $\lambda \geq 0$ alors :

d'une part : $\|u + v\| = \|u + \lambda u\| = (1 + \lambda)\|u\| = (1 + \lambda)\|u\|$ car $(1 + \lambda) \geq 0$

d'autre part : $\|u\| + \|v\| = \|u\| + \|\lambda u\| = \|u\| + \lambda\|u\| = (1 + \lambda)\|u\|$ car $\lambda \geq 0$ ■

\Rightarrow On suppose que $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$,

on en déduit que : $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$,

or on sait $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u | v \rangle + \|v\|^2$ on en déduit que $\langle u | v \rangle = \|u\|\|v\|$

on est dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwartz et ainsi $u = 0_E$ ou l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$,

et alors la relation $\langle u | v \rangle = \|u\|\|v\|$ permet d'établir $\lambda = \frac{\|v\|}{\|u\|} \geq 0$ ■

Théorème. (Généralisation)

$$\forall (u_i)_{1 \leq i \leq p} \in E^p, \quad \left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p \|u_i\|$$

Démonstration.

1.5 Vecteurs orthogonaux

Définition

$$\begin{aligned}
 &\text{Soient } u \text{ et } v \text{ deux vecteurs de } \mathbb{R}^n, \\
 &\text{Dire que } u \text{ et } v \text{ sont orthogonaux si, et seulement si, } \langle u | v \rangle = 0
 \end{aligned}$$

Remarques :

- On pourra noter $u \perp v$.
- On définit de même la notion de matrices colonnes orthogonales :

" X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont orthogonales" signifie que $X^T Y = 0$

1.6 Théorème de Pythagore

Théorème.

Pour tout $(u, v) \in E^2$,
 u et v sont orthogonaux si, et seulement si, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Démonstration.

Soit $(u, v) \in E^2$,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v; u + v \rangle \\ &= \langle u; u + v \rangle + \langle v; u + v \rangle \\ &= \langle u; u \rangle + \langle u; v \rangle + \langle v; u \rangle + \langle v; v \rangle \\ &= \langle u; u \rangle + 2\langle u; v \rangle + \langle v; v \rangle \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff \langle u; v \rangle = 0$$

Deux vecteurs u et v de E sont orthogonaux si, et seulement si, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Illustration graphique.

Théorème.

Soient p un entier naturel non nul et u_1, u_2, \dots, u_p des vecteurs de E ,
 Si les u_i sont 2 à 2 orthogonaux alors, $\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$

En effet : conséquence de la relation : $\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \langle u_i; u_j \rangle$

Remarques.

❶ Si ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$

❷ Si u et v sont orthogonaux alors $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

❸ Si les u_i sont 2 à 2 orthogonaux alors, $\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$

- Les réciproques des implications ❶ et ❷ sont vraies, mais pas celle de ❸.

Exercice : Trouver un contre-exemple dans \mathbb{R}^2 montrons que la réciproque de ❸ est fausse.

Une analyse non faite au tableau a permis de trouver les vecteurs suivants :

En prenant : $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ et $w = (1, -1)$

on a : $\|u + v + w\|^2 = \dots = 4$, $\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 = \dots = 4$ et $\langle u; w \rangle = 1 \neq 0$.

Ce contre-exemple montre que la réciproque de la généralisation du théorème de Pythagore est fausse pour $n \geq 3$.

Bases orthonormales.

2.1 Famille orthogonale de vecteurs non nuls

Définition.

Soient p un entier naturel non nul et (u_1, \dots, u_p) une famille de p vecteurs de \mathbb{R}^n ,
 Dire que (u_1, \dots, u_p) est **une famille orthogonale** signifie que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies \langle u_i; u_j \rangle = 0$

Remarques :

- On dira aussi "Les u_i sont deux à deux orthogonaux".
- On définit de même une famille orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- Il suffit d'avoir : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, \quad i < j \implies \langle u_i; u_j \rangle = 0$
- (*complément*) En notant A la matrice de p vecteurs (u_1, \dots, u_p) dans la base canonique de \mathbb{R}^n ,

(u_1, \dots, u_p) est une famille orthogonale si, et seulement si $A^\top A$ est diagonale

Théorème.

Soient p un entier naturel non nul et (u_1, \dots, u_p) une famille de p vecteurs de \mathbb{R}^n ,
 Si (u_1, \dots, u_p) est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** alors elle est libre.

Démonstration.

On suppose que (u_1, \dots, u_p) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E ,

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0_E$,

on en déduit pour $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\left\langle u_j; \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k \right\rangle = 0$, en déduit (*bilinéarité*) $\sum_{k=1}^p \lambda_k \langle u_j; u_k \rangle = 0$

et comme la famille est orthogonale il vient : $\lambda_j \langle u_j; u_j \rangle = 0$ ou encore $\lambda_j \|u_j\|^2 = 0$

de plus $u_j \neq 0_E$ donc $\|u_j\|^2 \neq 0$ et ainsi $\lambda_j = 0$,

on a bien montré que si $\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0_E$ alors tous les λ_k sont nuls.

donc :

si (u_1, \dots, u_p) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls alors (u_1, \dots, u_p) est libre

2.2 Définition.

Définition.

Soient p un entier naturel non nul et (u_1, \dots, u_p) une famille de p vecteurs de \mathbb{R}^n ,
 Dire que (u_1, \dots, u_p) est **une famille orthonormale** signifie que :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad \|u_i\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies \langle u_i; u_j \rangle = 0$$

Remarques :

- Une famille orthonormale est en particulier une famille orthogonale de vecteurs non nuls, elle est donc libre.
- Une famille orthonormale de p vecteurs d'un sous-espace F de dimension p est une base de F .
une base orthonormale de F .
- On définit de même une famille orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- La base canonique de \mathbb{R}^n est une base orthonormale de \mathbb{R}^n .

Propositions.

En notant P la matrice de n vecteurs (u_1, \dots, u_n) dans la base canonique de \mathbb{R}^n ,
 (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormale si, et seulement si, $P^T P = I_n$
 Les colonnes de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment une famille orthonormale
 si, et seulement si, M est inversible et $M^{-1} = M^T$

En effet : $P^T P = (\langle C_i, C_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$

Propositions.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et (v_1, \dots, v_p) une famille de p vecteurs d'une sous-espace vectoriel F de E ,

❶ Si (v_1, \dots, v_p) est une famille orthogonale et si les v_i sont **non nuls**
 alors $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_p}{\|v_p\|} \right)$ est une famille orthonormale de vecteurs de F .

❷ Si (v_1, \dots, v_p) est une famille orthonormale et si $\dim(F) = p$
 alors (v_1, \dots, v_p) est une base orthonormale de F

En effet :

Théorème.

Tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n possède une base orthonormale.

Démonstration. (admis)

En pratique. On commence par trouver une base orthogonale, ensuite on norme chaque vecteur de la famille.

2.3 Coordonnées dans une base orthonormale.

Théorème

Soient F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , u un vecteur de F et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F .

Si \mathcal{B} est une base orthonormale de F alors $\text{coord}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle u; e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u; e_p \rangle \end{pmatrix}$

Pour obtenir les coordonnées dans une base orthonormale il suffit de faire des produits scalaires.

Démonstration.

on note $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$, on a : $u = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ donc pour $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \langle u | e_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^p x_i e_i \mid e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^p x_i \langle e_i \mid e_j \rangle \\ &= x_j \langle e_j \mid e_j \rangle \\ &= x_j \end{aligned}$$

donc

$$\text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle u; e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u; e_p \rangle \end{pmatrix}$$

Exemple : Voir la feuille_cours_11_2

2.4 Expression du produit scalaire dans une base orthonormale.

Extrait du programme : On souligne le fait que le produit scalaire et la norme se calculent de la même manière dans toutes les bases orthonormales.

Théorème

Soient F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , u et v deux vecteurs de F et \mathcal{B} une base de F .

on note : $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \text{coord}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} = \text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$

Si \mathcal{B} est une base orthonormale de F alors

$$\langle u; v \rangle = \sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_i \quad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p \alpha_i^2}$$

Démonstration. Ce qu'on a fait au tableau .

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et on a $u = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^p \beta_i e_i$ donc

$$\begin{aligned} \langle u; v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i \mid \sum_{j=1}^p \beta_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \alpha_i \beta_j \langle e_i \mid e_j \rangle && \text{bilinéarité} \\ &= \sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_i \langle e_i \mid e_i \rangle && \text{car la famille est orthogonale} \\ &= \sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_i && \text{car } \|e_i\| = 1 \end{aligned}$$

$$\langle u; v \rangle = \sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_i$$

Une autre rédaction .

On note P la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} , $X = \text{coord}_{\mathcal{B}_c}(u)$, $Y = \text{coord}_{\mathcal{B}_c}(v)$, $X' = \text{coord}_{\mathcal{B}}(u)$, $Y' = \text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$.

$$\begin{aligned} \langle u; v \rangle &= X^T Y \\ &= (PX')^T (PY') && \text{(Formule de changement de base)} \\ &= X'^T P^T P Y' \\ &= X'^T Y' && (P^T P = I_n \text{ car } \mathcal{B} \text{ est orthonormale}) \end{aligned}$$

$$\langle u; v \rangle = \sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_i$$

On en déduit en prenant $u = v$:

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i^2$$

Théorème (complément)

Si P est la matrice de passage entre deux bases orthonormales alors P est inversible et $P^{-1} = P^T$

En effet : $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = (\langle e_i | e'_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ donc $\langle C_i | C_j \rangle = \langle e'_i | e'_j \rangle$

Matrice symétrique réelle.

3.1 Orthogonalité des vecteurs propres.

Théorème.

Soient n un entier naturel non nul, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(X_1, X_2) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Si $\begin{cases} A \text{ est symétrique} \\ X_1 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associée à } \lambda_1 \\ X_2 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associée à } \lambda_2 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$ alors X_1 et X_2 sont orthogonales.

Démonstration.

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
on suppose connaître X_1, X_2 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et λ_1, λ_2 dans \mathbb{R} tels que :

$$\underbrace{X_1 \neq 0, X_2 \neq 0}_{\text{inutile ici}}, \quad AX_1 = \lambda_1 X_1 \quad \text{et} \quad AX_2 = \lambda_2 X_2 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \quad \text{donc} \quad X_1^T A^T = \lambda_1 X_1^T \quad \text{et comme } A = A^T \text{ on a : } X_1^T A = \lambda_1 X_1^T$$

en multipliant par X_2 (à droite) il vient $X_1^T A X_2 = \lambda_1 X_1^T X_2$,

la relation $AX_2 = \lambda_2 X_2$ entraîne $\lambda_2 X_1^T X_2 = \lambda_1 X_1^T X_2$ ou encore : $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1^T X_2 = 0$

et comme $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ on a bien $X_1^T X_2 = 0$,

Les deux vecteurs propres X_1 et X_2 sont orthogonaux

Rappel : A symétrique signifie que $A^\top = A$, lire : "transposée de A égale A ".

Corollaire.

Soient n un entier naturel non nul, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(X_1, X_2) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Si A est symétrique, $X_1 \in E_{\lambda_1}(A)$, $X_2 \in E_{\lambda_2}(A)$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors X_1 et X_2 sont orthogonales.

Corollaire.

Soient n un entier naturel non nul, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
Si A est symétrique, alors en juxtaposant des bases orthogonales des sous-espaces propres de A on obtient une famille orthogonale formée de vecteurs propres de A .

3.2 Théorème spectral

Théorème.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
 Si M est symétrique alors il existe deux matrices $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\Delta \text{ diagonale, } P \text{ inversible, } P^{-1} = P^\top \text{ et } M = P\Delta P^\top$$

Démonstration. (*admis*)

Remarques :

- Si M est symétrique et réelle alors M possède une base orthonormale de vecteurs propres.
- " P inversible, $P^{-1} = P^\top$ " équivaut à " les colonnes de P forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ "
- Une matrice symétrique réelle est non seulement diagonalisable, mais on peut trouver, **parmi toutes les bases de vecteurs propres**, une base orthonormale.
- Si A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes
 alors toutes les bases de vecteurs propres de A sont orthogonales.

Autre formulation du théorème.

Si M est une matrice réelle symétrique

alors l'endomorphisme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X \mapsto MX$$

Ce qu'on simplifie par :

Si M est une matrice réelle symétrique alors elle est diagonalisable dans une base orthonormale.

En pratique. (*Voir la feuille Cour_11.3*)

Pour diagonaliser une matrice réelle symétrique M dans une base orthonormale :

- ❶ "La matrice M est symétrique réelle donc M est diagonalisable".
 (*ne pas perdre du temps en utilisant la méthode générale*).
- ❷ On détermine le spectre de M .
- ❸ On détermine une base de chaque sous-espace propre.
 (*On vérifie (sans l'écrire) que la somme des dimensions est égale à n*).
- ❹ **1er cas :** M a n valeurs propres distinctes. (*C'est le cas le plus simple*)
 Pour chaque valeur propre on détermine un vecteur propre.
 On a alors (X_1, \dots, X_n) une base orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M .
 (*Cette affirmation est justifiée par le corollaire de 3.1*)

2ème cas : M a au moins un sous espace propre de dimension supérieure ou égale à 2.

On détermine une base orthogonale de chaque sous-espace propre. (*L'énoncé devrait, en principe, vous aider*)

En juxtaposant toutes ces bases,

on obtient (X_1, \dots, X_n) une base orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M .
 (*Cette affirmation est justifiée par le corollaire de 3.1*)

- ❺ Il reste à normer les vecteurs :

En prenant $(C_1, \dots, C_n) = \left(\frac{X_1}{\|X_1\|}, \dots, \frac{X_n}{\|X_n\|} \right)$

La famille (C_1, \dots, C_n) est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M .

Autrement dit :

En notant pour chaque i , λ_i la valeur propre associée à C_i .

en notant P la matrice dont les colonnes sont C_1, \dots, C_n et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\underbrace{P \text{ inversible et } P^{-1} = P^\top}_{\text{c'est une base orthonormale}} \text{ et } \underbrace{M = PDP^{-1}}_{\text{de vecteurs propres de } M}$$

Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

On note $E = \mathbb{R}^n$

4.1 Définition.

Définition.

Soit F un sous espace vectoriel de E , on définit F^\perp (l'orthogonal de F) par :

$$F^\perp = \{ u \in E \mid \forall v \in F, \langle u; v \rangle = 0 \}$$

Remarques :

- ❶ $E^\perp = \{0_E\}$
- ❷ $\{0_E\}^\perp = E$
- ❸ C'est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F .

4.2 Propriétés.

Théorèmes.

Soit F un sous espace vectoriel de E , (on note (e_1, \dots, e_m) une base de F)

- ❶ F^\perp est un sous-espace vectoriel de E .
- ❷ $F \cap F^\perp = \{0_E\}$
- ❸ quel que soit $u \in E$, $u \in F^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, u \perp e_i$
- ❹ $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$
- ❺ $(F^\perp)^\perp = F$

Démonstrations.

❶ F^\perp est une partie de E et il contient le vecteur nul 0_E car $\forall v \in F, \langle v; 0_E \rangle = 0$, montrons qu'il est stable par combinaison linéaire :

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_1, u_2) \in F^\perp$,
pour un $v \in F$ quelconque,

$$\begin{aligned} \langle \alpha u_1 + \beta u_2; v \rangle &= \alpha \langle u_1; v \rangle + \beta \langle u_2; v \rangle && \text{(bilinéarité)} \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 && \text{(car } (u_1, u_2) \in F^\perp) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\alpha u_1 + \beta u_2 \in F^\perp$

Ce qui achève la démonstration de : F^\perp est stable par combinaison linéaire.

En conclusion :

F^\perp est un sous-espace vectoriel de E

②

(Démonstration par double inclusion)

\supseteq F et F^\perp sont des sous-espaces vectoriels de E donc $0_E \in F \cap F^\perp$.

\subseteq Soit $u \in F \cap F^\perp$,

on a $u \in F^\perp$ donc $\forall v \in F, \langle u; v \rangle = 0$

en particulier $u \in F$ donc on a $\langle u; u \rangle = 0$ ou encore $\|u\|^2 = 0$ ce qui entraîne : $u = 0_E$,

on a bien : $F \cap F^\perp \subset \{0_E\}$,

En conclusion : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$

③ Démonstration par double implication.

\Rightarrow Si $u \in F^\perp$ alors $\forall v \in F, \langle u | v \rangle = 0$ en particulier cela entraîne que $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, \langle u | e_i \rangle = 0$.

\Leftarrow Réciproquement : On suppose que pour un $u \in E, \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, \langle u | e_i \rangle = 0$.

Prenons un $v \in F$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^m$ tel que $v = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$

$$\begin{aligned} \langle u | v \rangle &= \langle u | \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u | e_i \rangle \quad (\text{bilinéarité}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\forall v \in F, \langle u | v \rangle = 0$ et ainsi $u \in F^\perp$

En conclusion : $u \in F^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, \langle u | e_i \rangle = 0$

Autrement dit : un vecteur est dans l'orthogonal de F si, et seulement si il est orthogonal aux vecteurs d'une base de F .

④ (Admis pour l'instant.) On le démontrera avec le théorème du rang appliqué à la p_F .

⑤ (Démonstration d'une inclusion)

Soit $v \in F$,

pour tout $u \in F^\perp$ on a $\langle u; v \rangle = 0$ donc $v \in (F^\perp)^\perp$,

$$F \subset (F^\perp)^\perp$$

En admettant ④ on a $\dim(F) = \dim((F^\perp)^\perp)$ ce qui permet de justifier $F = (F^\perp)^\perp$

Remarque : ④ donne $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$ et $\dim(F^\perp) + \dim((F^\perp)^\perp) = n$

Proposition. (Un cas particulier : vecteur normal à un hyperplan)

Soit $v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $v \neq 0_E$,

$$\text{Vect} \langle v \rangle = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\}^\perp$$

$$\begin{aligned} \text{En effet : } \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\} &= \{ u \in E \mid \langle u | v \rangle = 0 \} \\ &= \{ u \in E \mid \forall t \in \text{Vect} \langle v \rangle, \langle t | u \rangle = 0 \} \\ &= \text{Vect} \langle v \rangle^\perp \end{aligned}$$

$$\text{Remarque : } \dim \left(\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\} \right) = n - 1$$

Exemples dans \mathbb{R}^3 :

$$(\text{Vect} \langle (1, 2, -4) \rangle)^\perp = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 4z = 0 \} \quad \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3z = 0 \}^\perp = \text{Vect} \langle (2, 0, -3) \rangle$$

4.3 Décomposition.

Théorème

Soit F un sous espace vectoriel de E ,
 quel que soit $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ vérifiant $u = u_F + u_{F^\perp}$
définition : u_F est appelé **projeté orthogonal** de u sur F , on note le note $p_F(u)$

Démonstration.

Soit $u \in E$,

- (Existence) (non faite en classe)

Idee : On note (e_1, \dots, e_m) une base orthonormale de F et on pose $v = \sum_{i=1}^m \langle u | e_i \rangle e_i$,

- d'une part on a : $v \in F$
- d'autre part pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, $\langle u - v | e_i \rangle = \dots = 0$ donc (en utilisant ❸) $u - v \in F^\perp$

$$\langle u - v, e_i \rangle = \langle u, e_i \rangle - \sum_{j=1}^m \langle u, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle = \langle u, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle = 0.$$

donc en posant $(u_F, u_{F^\perp}) = (v, u - v)$ on a : $(u_F, u_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ vérifiant $u = u_F + u_{F^\perp}$

- (Unicité)

supposons qu'il existe deux couples $(v_1, v_2) \in F \times F^\perp$ et $(v'_1, v'_2) \in F \times F^\perp$ tels que $\begin{cases} u = v_1 + v_2 \\ u = v'_1 + v'_2 \end{cases}$.

On a alors $v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2$ ce qui entraîne $\underbrace{v_1 - v'_1}_{\in F} = \underbrace{v'_2 - v_2}_{\in F^\perp}$ et donc $v_1 - v'_1 \in F \cap F^\perp$

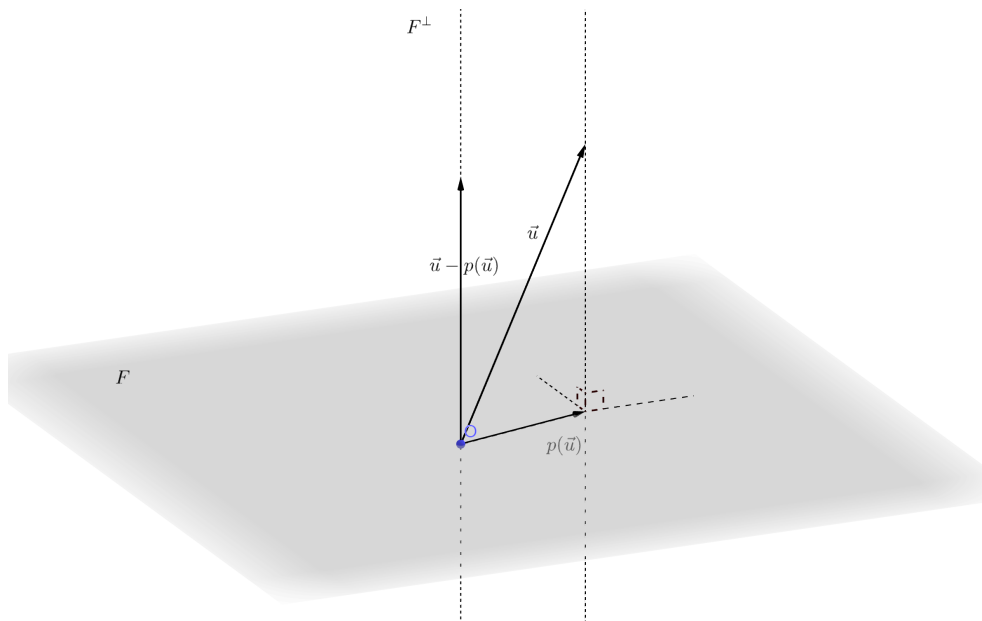
or on a vu que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ donc $v_1 = v'_1$, puis $v_2 = v'_2$, le couple (v_1, v_2) est bien unique.

Remarques :

- ❶ $p_F(x)$ est l'unique vecteur v de \mathbb{R}^n vérifiant : $v \in F$ et $u - v \in F^\perp$.
- ❷ $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $p_F(u) \in F$ et $u - p_F(u) \in F^\perp$
- ❸ En particulier $u - p_F(u) \perp p_F(u)$, ce qui entraîne : $\|u - p_F(u)\|^2 + \|p_F(u)\|^2 = \|u\|^2$.
(théorème de Pythagore)
- ❹ $\forall u \in F$, $p_F(u) = u$ et $\forall u \in F^\perp$, $p_F(u) = 0_E$

En effet : tout vecteur $u \in F$ s'écrit $u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in F^\perp}$ donc pour tout $u \in F$, $p_F(u) = u$

tout vecteur $u \in F^\perp$ s'écrit $u = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in F^\perp}$ donc pour tout $u \in F^\perp$, $p_F(u) = 0_E$



Projection orthogonale.

5.1 Définition.

Définition. (La projection orthogonale sur F).

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ,

La projection orthogonale sur F est l'application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n qui, à tout vecteur u associe son projeté orthogonal sur F .

$$p_F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u \longmapsto u_F \quad \text{où} \quad u = \underbrace{u_F}_{\in F} + \underbrace{u_{F^\perp}}_{\in F^\perp}$$

Remarques.

- Autrement dit : La projection orthogonale sur F est l'application qui, à tout vecteur, associe sa composante dans F lorsqu'il est décomposé sur F et F^\perp .
- Si $F = \mathbb{R}^n$ alors $p_F = \text{Id}_E$ Si $F = \{0_E\}$ alors p_F est l'endomorphisme nul.

Théorème.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , la projection orthogonale sur F est un endomorphisme de \mathbb{R}^n .

Démonstration : On note p la projection orthogonale sur F .

$p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donc il suffit de montrer que p est linéaire

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in E^2$,

en décomposant u et v : $u = \underbrace{u_F}_{\in F} + \underbrace{u_{F^\perp}}_{\in F^\perp}$ et $v = \underbrace{v_F}_{\in F} + \underbrace{v_{F^\perp}}_{\in F^\perp}$

on obtient : $\alpha u + \beta v = \alpha(u_F + u_{F^\perp}) + \beta(v_F + v_{F^\perp}) = \underbrace{\alpha u_F + \beta v_F}_{\in F} + \underbrace{\alpha u_{F^\perp} + \beta v_{F^\perp}}_{\in F^\perp}$

ce qui donne $p(\alpha u + \beta v) = \alpha u_F + \beta v_F$, en encore : $p(\alpha u + \beta v) = \alpha p(u) + \beta p(v)$ ■

5.2 Caractérisation.

Théorème.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ,

la projection orthogonale sur F est l'endomorphisme p de \mathbb{R}^n vérifiant :

- ❶ $p \circ p = p$.
- ❷ $\ker(p)$ est égal à F^\perp .
- ❸ $\text{Im}(p)$ est égal à F .

Démonstrations.

- Supposons que p est la projection orthogonale sur F .

Soit $u \in E$,

$$\begin{aligned} p \circ p(u) &= p(p(u)) \\ &= p(u) \quad (\text{car } p(u) \in F \text{ et } \forall v \in F, p(v) = v) \end{aligned}$$

$$\boxed{p \circ p = p \quad \text{①}}$$

(Double inclusion)

On sait que $u - p(u) \in F^\perp$ donc

- d'une part si $p(u) = 0_E$ alors $u \in F^\perp$ donc $\ker(p) \subset F^\perp$.
- d'autre part si $u \in F^\perp$ alors $u = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in F^\perp}$ donc $p(u) = 0_E$ d'où $F^\perp \subset \ker(p)$.

$$\boxed{\ker(p) = F^\perp \quad \text{②}}$$

(Double inclusion)

- d'une part pour tout $u \in F$, $u = p(u)$ donc $F \subset \text{Im}(p)$
- d'autre part pour tout $u \in E$, $p(u) \in F$ donc $\text{Im}(p) \subset F$

$$\boxed{\text{Im}(p) = F \quad \text{③}}$$

- Supposons que p vérifie ①, ② et ③.

Soit $u \in E$,

d'une part, $p(u - p(u)) = p(u) - p \circ p(u) = 0_E$ donc $u - p(u) \in \ker(p)$ ou encore $u - p(u) \in F^\perp$

d'autre part, $p(u) \in \text{Im}(p)$ et comme $F = \text{Im}(p)$, il vient $p(u) \in F$

donc $p(u)$ est le projeté orthogonal de u sur F , autrement dit : $\boxed{p \text{ est la projection orthogonale sur } F}$.

Remarques :

- Si un endomorphisme vérifie ces trois affirmations alors c'est nécessairement p_F .
- En notant $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F)$ (matrice dans une base quelconque), on a : $M^2 = M$.
- Le théorème du rang permet enfin de justifier : $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$
- $\ker(p_F)^\perp = \text{Im}(p_F)$ et $\text{Im}(p_F)^\perp = \ker(p_F)$

5.2.1 Ecriture avec une base orthonormale.

Théorème.

Soient F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et (e_1, \dots, e_m) une base orthonormale de F .

La projection orthogonale sur F est définie par : $\forall u \in \mathbb{R}^n, p_F(u) = \sum_{k=1}^m \langle u; e_k \rangle e_k$

En effet : (Voir la démonstration de l'existence de la définition).

Remarques :

- Pour définir la projection orthogonale de F il suffit de connaître une base orthonormale de F .
- On utilise ce théorème pour (entre autres) déterminer la matrice de p_F dans la base canonique.

Corollaire. (Projection sur une droite vectorielle).

Soit v un vecteur non nul de \mathbb{R}^n , on note $F = \text{vect}(v)$ (La droite vectorielle dirigée par v)

La projection orthogonale sur F est définie par : $\forall u \in \mathbb{R}^n, p_F(u) = \frac{\langle u; v \rangle}{\|v\|^2} v$

En effet :

Distance.

6.1 Définitions.

Définition. *Distance entre deux vecteurs.*

Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^n ,
on appelle distance (euclidienne) entre u et v le réel $\|u - v\|$.

Propriétés :

Soient u, v et w trois vecteurs de \mathbb{R}^n ,
 ❶ $d(u, v) \geq 0$. ❷ $d(u, v) = d(v, u)$. ❸ $d(u, v) = 0 \iff u = v$. ❹ $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

Définition. *Distance d'un vecteur à une partie non vide de \mathbb{R}^n .*

Soit u un vecteur de \mathbb{R}^n et S une partie non vide de \mathbb{R}^n ,
on appelle distance de u à S le réel : $\inf(\{d(u, v) \mid v \in S\})$
(on notera $d(u, S)$ ce réel)

Remarque : La borne inférieure existe car cet ensemble de réel est minorée par 0.

Revoir la définition d'une borne inférieure et le théorème de la borne supérieure dans \mathbb{R} .

Quand l'ensemble $\{d(u, v) \mid v \in S\}$ possède un plus petit élément, (ie : $\exists v \in S : d(u, v) = d(u, S)$), on note

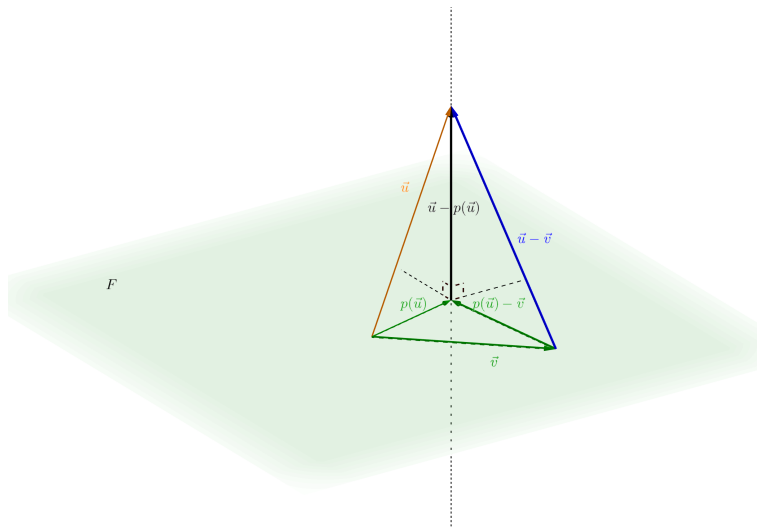
$$d(u, S) = \min(\{d(u, v) \mid v \in S\})$$

6.2 Lien entre distance et projeté orthogonal.

Théorème.

Si F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n alors $\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad d(u, F) = \|u - p_F(u)\|$

Autrement dit : Ce résultat signifie que la distance à F est réalisée par le projeté orthogonal.



Démonstration.

- Soit $v \in F$

$$u - v = \underbrace{(u - P_F(u))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(P_F(u) - v)}_{\in F}$$

donc (en appliquant le théorème de Pythagore) : $\|u - v\|^2 = \|u - P_F(u)\|^2 + \|P_F(u) - v\|^2$

- On en déduit que : $\|u - P_F(u)\|^2 \leq \|u - v\|^2$

les normes sont positives donc on obtient : $\forall v \in F, \|u - P_F(u)\| \leq \|u - v\|$.

- et comme $p_F(u) \in F$ on obtient : $\|u - p_F(u)\| = \min\{\|u - v\| \mid v \in F\}$

$$d(u, F) = \|u - p_F(u)\|$$

Remarques :

Pour u un vecteur de \mathbb{R}^n et F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ,

- $d(u, F) = \|p_{F^\perp}(u)\|$
- $p_F(u)$ est le vecteur de F réalisant le minimum sur F de la fonction $v \mapsto d(u, v)$.
- Pour tout $v \in F$, $d(u, p_F(u)) \leq d(u, v)$, ou encore $\|u - p_F(u)\| \leq \|u - v\|$
- Ici l'ensemble $\{d(u, v) \mid v \in F\}$ admet un plus petit élément, $d(u, F) = \min\{d(u, v) \mid v \in F\}$.

6.3 Cas particulier. (complément)

Proposition. (Distance d'un vecteur à un plan de \mathbb{R}^3).

Soit n un vecteur non nul de \mathbb{R}^3 , on note $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \perp n\}$ (Le plan de vecteur normal n)

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad d(u, F) = \frac{|\langle u; n \rangle|}{\|n\|}$$

En effet : En posant $e_1 = \frac{n}{\|n\|}$, (e_1) est une base orthonormale de F^\perp donc $p_{F^\perp}(u) = \langle u | e_1 \rangle e_1$

on en déduit : $\|p_{F^\perp}(u)\| = |\langle u | e_1 \rangle| = \frac{|\langle u; n \rangle|}{\|n\|}$

6.4 Ajustement affine par la méthode des moindres carrés.

(Fait en classe sur l'Ex 8 de la feuille_Exo_26)

Une expérience donne une série statistique double sous la forme de deux listes : (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) et on note :

$$v_1 = (1, \dots, 1) \quad v_2 = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad u = (y_1, \dots, y_n).$$

et F l'espace engendré par v_1 et v_2 . (on suppose que la famille (v_1, v_2) est libre)

Les éléments de F sont les listes $z = (z_1, \dots, z_n)$ pour lesquelles il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad z_i = a + bx_i.$$

Autrement dit, les points $M_i(x_i, z_i)$ sont alignés.

L'ajustement affine par la méthode des moindres carrés revient à :

- déterminer dans F quelle est la liste minimisant la distance à u .
- déterminer \hat{u} dans F tel que $d(u, \hat{u}) = d(u, F)$.
- déterminer le projeté orthogonal de u sur F .

$p_F(u)$ est un vecteur de F , on note (\hat{a}, \hat{b}) ses coordonnées dans la base (v_1, v_2) ,

On appelle **droite de régression linéaire de y en x** la droite d'équation : $y = \hat{a} + \hat{b}x$

Voir le sujet MMI 2017, 2019 vu en TD informatique, feuille info 24

Remarque : Cela revient à minimiser la fonction :

$$f : (a, b) \mapsto \|u - (av_1 + bv_2)\|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2$$

A savoir illustrer graphiquement.

Calcul de (\hat{a}, \hat{b}) en faisant apparaître la matrice de Gram. (*Fait en classe*)

$$\begin{aligned}
 av_1 + bv_2 = p_F(u) &\iff u - (av_1 + bv_2) \in F^\perp \\
 &\iff \begin{cases} u - (av_1 + bv_2) \perp v_1 \\ u - (av_1 + bv_2) \perp v_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \langle u - (av_1 + bv_2) | v_1 \rangle = 0 \\ \langle u - (av_1 + bv_2) | v_2 \rangle = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \langle u | v_1 \rangle = a \langle v_1 | v_1 \rangle + b \langle v_2 | v_1 \rangle \\ \langle u | v_2 \rangle = a \langle v_1 | v_2 \rangle + b \langle v_2 | v_2 \rangle \end{cases} \\
 &\iff \begin{pmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u | v_1 \rangle \\ \langle u | v_2 \rangle \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

on remarque que

$$\langle v_1 | v_1 \rangle = n \quad \langle v_1 | v_2 \rangle = n\bar{x} \quad \langle v_2 | v_2 \rangle = n\bar{x}^2 \quad \langle u | v_1 \rangle = n\bar{y} \quad \langle u | v_2 \rangle = n\bar{x}\bar{y}$$

on obtient le système :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} n & n\bar{x} \\ n\bar{x} & n\bar{x}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\bar{y} \\ n\bar{x}\bar{y} \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{x}\bar{y} \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} a + \bar{x}b = \bar{y} \\ \bar{x}a + \bar{x}^2b = \bar{x}\bar{y} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a + \bar{x}b = \bar{y} \\ (\bar{x}^2 - (\bar{x})^2)b = \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \bar{x}L_1
 \end{aligned}$$

on définit : $\sigma_x^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$ (variance empirique de la série (x_i))

et $\text{cov}(x, y) = \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y}$ (covariance empirique de la série double (x_i, y_i))

comme on a supposé que la famille (v_1, v_2) est libre on peut montrer que $\sigma_x^2 \neq 0$

On obtient alors :

$$av_1 + bv_2 = p_F(u) \iff \begin{cases} a + \bar{x}b = \bar{y} \\ b = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} \end{cases}$$

La droite de régression linéaire de y en x est la droite d'équation $y = a + bx$ où :

$$b = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} \quad \text{et} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$