Correction de la feuille Exo_26 : Diagonalisation et théorème spectral.

Ex 1 : Faisons l'étude complète pour $M = M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) M est réelle symétrique donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$.

2) • M est de rang 1 donc 0 est une valeur propre de M et $\dim(E_0(M) = 2$ *(théorème du rang)*

• On remarque que $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc 3 est une valeur propre de M et $\dim(E_3(M) \geqslant 1$

de plus M est une matrice 3×3 donc il n'y a pas d'autre valeur propre *(et* $\dim(E_3(M) = 1$ *)* et

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{0; 3\}}$$

3) • $\dim(E_0(M) = 2$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de deux vecteurs de $E_0(M)$ donc

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0(M)}$$

• $\dim(E_3(M) = 1$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $E_3(M)$ donc

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_3(M)}$$

4) L'étude précédente montre que : *(juxtaposition des bases des $E_\lambda(f)$)* :

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formées de vecteurs propre de M,

Donc en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ on a : $\underbrace{Q \text{ inversible}}_{\text{c'est une base}}$ et $\underbrace{M = Q \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}}_{\text{de vecteurs propres de } M}$

5) Déterminons une base orthonormée de chaque sous-espace propre.

• $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_3(M)$ donc $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormée de $E_3(M)$

• En notant $(u, v) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{aligned} E_0(M) &= \mathrm{Vect}(u, v) \\ &= \mathrm{Vect}(u, v - \alpha u) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u \perp v-\alpha u &\iff\ < u \mid v-\alpha u > \\
&\iff\ < u \mid v > -\alpha < u \mid u >= 0 \\
&\iff\ \alpha = \frac{< u \mid v >}{||u||^2} \\
&\iff\ \alpha = -\frac{1}{2} \\
&\iff\ v-\alpha u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff\ v-\alpha u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est une base orthogonale de $E_0(M)$

et ainsi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormale de $E_0(M)$

En juxtaposant les bases on obtient :

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormale *(de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée)* de vecteurs propres de M.

Autrement dit : en posant $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ on a : $\boxed{\underbrace{P \text{ inversible et } P^{-1} = P^{\top}}_{\text{c'est une base orthonormale}} \text{ et } \underbrace{M = P\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}}_{\text{de vecteurs propres de } M}}$

Pour les autres je ne fais que ce que vous deviez faire au tableau :

• Matrice M_1.

$\mathrm{Sp}(M_1) = \{-1, 0, 2\}$ $\quad E_{-1}(M_1) = \mathrm{vect}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad E_0(M_1) = \mathrm{vect}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $E_2(M_1) = \mathrm{vect}\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formées de vecteurs propre de M,

Donc en posant $\quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a : $\underbrace{Q \text{ inversible}}_{\text{c'est une base}}$ et $\underbrace{M = Q\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}Q^{-1}}_{\text{de vecteurs propres de } M}$

On (remarque/sait) que $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base orthogonale donc

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormale de vecteurs propres de M_1.

Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ on a : $\boxed{\underbrace{P \text{ inversible et } P^{-1} = P^{\top}}_{\text{c'est une base orthonormale}} \text{ et } \underbrace{M_3 = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}}_{\text{de vecteurs propres de } M_3}}$

• Pour M_4. *(Juste la réponse)*

En posant $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1} = P^\top$ et $M_4 = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1}$

• Pour M_5. *(Juste la réponse)*

En posant $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ on a $P^{-1} = P^\top$ et $M_5 = P\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$

• Pour M_6. *(Juste la réponse)*

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ on a $P^{-1} = P^\top$ et $M_6 = P\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$

Ex 2 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Justifier que f est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
2) Diagonaliser f dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Indication :

$\mathrm{Sp}(M) = \{3, 6, 9\}$ $\quad E_3(M) = \mathrm{vect}\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad E_6(M) = \mathrm{vect}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $E_9(M) = \mathrm{vect}\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ex 3 : 1) a. Montrer que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans une base orthonormale alors M est symétrique.

b. Enoncer la contraposée de l'implication précédente.

2) a. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que :

$$\text{Si } f \text{ est diagonalisable dans une base orthonormale de } \mathbb{R}^n \text{ alors } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) \text{ est symétrique.}$$

b. On note $\mathscr{B}$ la base $((1,0),(1,1))$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

f est-il diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$?

Ex 4 : On note $M = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice M^n.

Indication :

$\mathrm{Sp}(M) = \left\{-\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, 1\right\}$ $E_{-\frac{1}{12}}(M) = \mathrm{vect}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $E_{\frac{1}{4}}(M) = \mathrm{vect}\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $E_1(M) = \mathrm{vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ex 5 : On note un entier $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}^n$, deux vecteurs de E, u et v, non nuls et non orthogonaux et l'application

$$\varphi : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & < x\,;u > v \end{pmatrix}$$

1) Montrer que φ est une application linéaire.
2) Montrer que 0 est une valeur propre de φ et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3) Montrer que v est un vecteur propre pour φ associé à une valeur propre à déterminer.
4) En déduire que φ est diagonalisable dans une base orthonormale.

Ex 6 : On note M la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec que des 1. Diagonaliser M dans une base orthonormale.

Ex 7 : *(Extrait de MCR 2024)*

1) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Justifier que $A^T A$ est diagonalisable.
2) Dans cette question on considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Déterminer $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telles que $A^T A = PDP^{-1}$.
   On fera en sorte que la première ligne de P ne soit constituée que de 1.