Table des matières

1

Couples de variables aléatoires discrètes.

1.1 Introduction.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur le même espace $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

on note $X(\Omega) = \{\ x_i \mid i \in I\ \}$ avec $\overbrace{I = [\![1;n]\!]}^{\text{finie}}$ ou $\overbrace{I = \mathbb{N}}^{\text{dénombrable}}$ (et $\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$)

$Y(\Omega) = \{\ y_i \mid i \in J\ \}$ avec $J = [\![1;n']\!]$ ou $J = \mathbb{N}$ (et $\forall (i,j) \in J^2, \quad i \neq j \Longrightarrow y_i \neq y_j$)

Définition.

L'application $(X,Y) : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$ est appelée couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

Remarque : $(X,Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$

(autrement dit : certains couples de $X(\omega) \times Y(\omega)$ peuvent ne pas être pris par (X,Y))

1.2 Loi conjointe.

Définition.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

On appelle loi (conjointe) du couple (X,Y) l'application $\begin{array}{rcl} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y]) \end{array}$.

Remarques :

- Donner la loi conjointe du couple (X,Y) c'est :

  donner $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et donner pour tout $(i,j) \in I \times J$, $\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

- Lorsque le nombre de valeurs est fini on présente souvent la loi conjointe sous forme de tableau.

  *(Voir **EX 1** dans la feuille_cours_13)*

- on ne donne pas toujours la loi conjointe sous la forme d'un tableau.

  *(Voir **EX 2** dans la feuille_cours_13)*

- On pourra noter $(X = x, Y = y)$ l'événement $(X = x) \cap (Y = y)$.

Proposition. *(Système complet d'événements)*

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires finies sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

❶ Pour tous (x,y), (x',y') de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$$(x,y) \neq (x',y') \Longrightarrow (X = x, Y = y) \cap (X = x', Y = y') = \varnothing$$

❷ $\displaystyle\bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X = x_i, Y = y_j) = \Omega$

❸ La somme double $\displaystyle\sum_{(i,j) \in I \times J} P((X = x_i, Y = y_j))$ converge et sa somme vaut 1.

1.3 Lois marginales.

Définition.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,
- la loi de probabilité de X est appelée **première loi marginale** du couple (X, Y),
- la loi de probabilité de Y est appelée **deuxième loi marginale** du couple (X, Y).

Proposition : *lien entre la loi conjointe et les lois marginales* :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

$$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}([X = x_i]) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right) \qquad \forall j \in J, \quad \mathbb{P}([Y = y_j]) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right)$$

Justification : *C'est juste l'application de la formule des probabilités totales. (version avec les intersections)*

On peut résumer les différentes propriétés dans un tableau quand les variables sont finies.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	$y_{n'}$	$\mathbb{P}(X = x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	$p_{1\,n'}$	$\sum p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	$p_{2\,n'}$	$\sum p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	$p_{n\,n'}$	$p_{n\cdot}$
$\mathbb{P}(Y = y_j)$	$\sum p_{\cdot 1}$	$\sum p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$\sum p_{\cdot n'}$	1

1.4 Indépendance de variables aléatoires.

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

Dire que X et Y sont indépendantes signifie que

$$\forall (i, j) \in I \times J, \quad \mathbb{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right) = \mathbb{P}([X = x_i]) \times \mathbb{P}([Y = y_j])$$

Remarques :
- Cela revient à dire que pour tout (i, j) les événements $[X = x_i]$ et $[Y = y_j]$ sont indépendants.
- Lorsque les variables sont indépendantes on peut construire la loi conjointe avec les lois marginales.
- Pour montrer que deux variables ne sont pas indépendantes, on cherche un couple (i, j) :

$$\mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \;\neq\; \mathbb{P}([X = x_i])\,\mathbb{P}([Y = y_j])$$

- Sur l'**EX 1** X et Y ne sont pas indépendantes car :
- Sur l'**EX 2** X et Y ne sont pas indépendantes car :

1.5 Lois conditionnelles.

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

- Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\quad \mathbb{P}([X = x]) \neq 0$,

  La loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ est l'application $\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ y & \longmapsto & \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) \end{array}$

- Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\quad \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$,

  La loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ est l'application $\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) \end{array}$

Propositions : *(Loi conjointe / lois conditionnelles).*

$$\forall (i,j) \in I \times J, \quad \mathbb{P}\left([X = x_i] \cap (Y = y_j)\right) = \mathbb{P}([X = x_i]) \times \mathbb{P}_{[X=x_i]}([Y = y_j])$$

$$\forall (i,j) \in I \times J, \quad \mathbb{P}\left([X = x_i] \cap ([Y = y_j])\right) = \mathbb{P}([Y = y_j]) \times \mathbb{P}_{[Y=y_j]}([X = x_i])$$

Justification : *Cela découle directement de la définition d'une probabilité conditionnelle.*

Propositions : *(Lois marginales / lois conditionnelles).*

$$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}([X = x_i]) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}([Y = y_j]) \times \mathbb{P}_{[Y=y_j]}([X = x_i])$$

$$\forall j \in J, \quad \mathbb{P}([Y = y_j]) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}([X = x_i]) \times \mathbb{P}_{[X=x_i]}([Y = y_j])$$

Justification : *On applique la formule des probabilités totales. (Version avec les probabilités conditionnelles).*

Exemple classique vu dans la *feuille Exo_8.*

Une tortue pond N œufs. On suppose que N est un variable de Poisson de paramètre λ.
Chaque œuf pondu a la probabilité $p \in]0,1[$ de survivre et ceci indépendamment des autres œufs.
On note X le nombre de survivants.

1. Pour $i \in \mathbb{N}$, donner la loi conditionnelle de X sachant $(N = i)$.
2. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(X = k)$.

1. Sachant $(N = i)$, l'expérience est constituée de i épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le succès étant : "l'oeuf survit" a pour probabilité p et X est le nombre de succès donc X donc

$$\boxed{\text{Sachant } (N = i), \quad X \hookrightarrow \mathscr{B}(i,p)}$$

2. Les valeurs prises par X sont les entiers naturels,
pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on applique la formule des probabilités totales avec le système complet $(N = i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(N = i) P_{N=i}(X = k) \\
&= \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \times \binom{i}{k} p^k q^{i-k} \qquad \textit{(on supprime des termes nuls)} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k p^k \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{i-k}}{(i-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k p^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^i}{i!} \qquad \textit{(Changement d'indice)} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k p^k \, e^{\lambda q} \qquad \textit{(série exponentielle)} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda p)}$$

1.6 Recherche de la loi de u(X,Y) sur des exemples.

Proposition.

Soient X et Y deux variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et u une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$,
Si la fonction u est définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et les variables aléatoires X et Y sont discrètes
alors $u(X,Y)$ est une variable aléatoire discrète de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$

Remarques : $u(X,Y)$ est la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le réel $u\big(X(\omega), Y(\omega)\big)$.

Exemples : $X+Y$, XY, $\min(X,Y)$ et $\max(X,Y)$.

En pratique.

> Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et u une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
> on note $Z = u(X,Y)$,
> alors pour tout $z \in Z(\Omega)$, $\mathbb{P}([Z=z]) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j]\cap[Z=z])$

Justification : On applique juste la formule des probabilités totales.

*On reprend l'**EX 1** de la feuille_Cours_13*

$X \backslash Y$	0	1	2	3
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
4	0	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$
5	0	0	$\frac{6}{32}$	$\frac{6}{32}$

La loi de $Z = X+Y$:

z	3	4	5	6	7	8
$P(Z=z)$						

La loi de $W = \max(X-3, Y)$:

w	0	1	2	3
$P(W=w)$				

Un autre exemple :
On considère un couple de variables aléatoires (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dont la loi conjointe est donnée par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^{*2}, \qquad \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{1}{2^{i+j}}.$$

Quelle est la loi de $Z = X - Y$?

1.7 Espérance de u(X,Y) .

Conformément au programme on ne donne le théorème de transfert que pour deux variables aléatoires discrètes finies.

Théorème : (*Théorème de transfert*)

> Soient X et Y deux variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et u une fonction de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$,
> Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis :
> la variable aléatoire $u(X,Y)$ admet *(toujours)* une espérance qui vérifie :
>
> $$E(u(X,Y)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u(x_i, y_j)\, \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$$

Exemples

2 Covariance. Variance d'une somme.

2.1 Définition.

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,
Si X, Y admettent une variance alors (X, Y) admet une covariance donnée par :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\Big(\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\Big) \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Remarques :

① Quand $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$ on dit qu'elles sont décorrélées.
② Quand $\operatorname{cov}(X,Y) < 0$, en moyenne quand la valeur de X est grande, celle de Y a tendance à être petite.
③ Quand $\operatorname{cov}(X,Y) > 0$, en moyenne quand la valeur de X est grande , celle de Y a tendance à être grande.
④ On peut remplacer la condition d'existence "X, Y admettent une variance" par *(au choix)*

- X et Y admettent un moment d'ordre 2.
- X, Y et XY admettent une espérance.

⑤ Quand l'ensemble des valeurs est fini il n'y a pas de problème d'existence.
⑥ Pour a une constante : $\operatorname{cov}(X, a) = 0$ et $\operatorname{cov}(a, X) = 0$

Exemple EX 1 :

$X \backslash Y$	0	1	2	3	
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
4	0	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$
5	0	0	$\frac{6}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{3}{8}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	1

Exemple EX 2

La loi conjointe de (X, Y) est : $(X,Y)(\Omega) \subset (\mathbb{N}^*)^2$ et $\forall (k_1, k_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbb{P}\left((X = k_1) \cap (Y = k_2)\right) = q^{k_2 - 2}\, p^2\, \mathbb{1}_{k_1 < k_2}$,
X suit la loi géométrique de paramètre p et $Y(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$ et pour tout $k \geqslant 2$, $P(Y = k) = (k-1)q^{k-2}\, p^2$
On pourra utiliser la remarque :

En notant Z le nombre d'épreuves entre le 1er et le 2-ième succès on a : $X = Y + Z$ et Y et Z indépendantes.

Proposition.

Soit X une variable aléatoire discrète de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

Si X admet une variance alors $\operatorname{cov}(X,X) = V(X)$

Remarque : A mettre en parallèle avec : $< u|u >= ||u||^2$ vue dans le cours : "Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$" .

2.2 Propriétés.

Propriétés : "*C'est une forme bilinéaire positive et symétrique*".

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ admettant une variance et a, b deux réels quelconques,

❶ $\operatorname{cov}(X,X) \geqslant 0$

❷ $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$

❸ $\operatorname{cov}(X\ ,\ aY+bZ) = a\operatorname{cov}(X,Y) + b\operatorname{cov}(X,Z)$

❹ $\operatorname{cov}(aX+bY\ ,\ Z) = a\operatorname{cov}(X,Z) + b\operatorname{cov}(Y,Z)$

Démonstration.

Proposition : *(complément)*

$$\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n'} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n'} a_i b_j \operatorname{cov}\left(X_i, Y_j\right)$$

Illustration :

Remarque :

• A mettre en parallèle avec : $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j\right)$ vue dans le cours : "Somme double" .

• A mettre en parallèle avec : $\left\langle \sum_{i=1}^{p} u_i\ ;\ \sum_{j=1}^{p'} v_j \right\rangle$ vue dans le cours : "Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$" .

Théorème : *(complément)*

Si X, Y admettent une variance alors $\operatorname{cov}(X,Y)^2 \leqslant V(X)V(Y)$

Remarque : A mettre en parallèle avec : l'inégalité de Cauchy-Schwarz vue dans : "Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$" .

2.3 Variance d'une somme.

Théorème

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,
Si X et Y admettent une variance alors $X+Y$ admet une variance et :

$$V(X+Y) = V(X) + 2\operatorname{cov}(X,Y) + V(Y)$$

Démonstration.

Remarques :

- A mettre en parallèle avec : $||u+v||^2 =$.................. vue dans : "Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$"
- On peut en déduire que $\sigma(X+Y) \leqslant \sigma(X) + \sigma(Y)$

Corollaire

Pour a et b deux réels,

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + 2\,ab\operatorname{cov}(X,Y) + b^2V(Y)$$

En effet.

Proposition. *(Complément)*

Pour n variables aléatoires discrètes $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$

Si $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ admettent des variances, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ admet une variance et

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

Pour tout $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2V(X_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j\operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

En effet.

Remarque :

Si Y est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant chacune une variance alors Y admet une variance.

2.4 Cas particuliers des variables aléatoires indépendantes.

Théorèmes.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant des variances,

❶ **Si** X et Y sont indépendantes **alors** $E(XY) = E(X)E(Y)$
❷ **Si** X et Y sont indépendantes **alors** $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$
❸ **Si** X et Y sont indépendantes **alors** $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Théorème.

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ des variables aléatoires discrètes
Si les X_k sont (mutuellement) indépendantes et admettent chacune une variance **alors**

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ admet une variance et } \quad V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Remarques :

- Ici l'indépendance deux à deux des variables aléatoires suffit. *(complément)*
- A mettre en parallèle avec : le théorème de Pythagore vue dans : "Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$" .

2.5 Coefficient de corrélation.

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,
Si X, Y admettant des variances non nulles alors
on appelle **coefficient corrélation linéaire** du couple (X, Y) le réel : $\rho_{X,Y} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Théorème. (*complément*)

Pour toutes variables aléatoires discrètes X et Y admettant des variances non nulles on a :

❶ $-1 \leqslant \rho_{X,Y} \leqslant 1$

❷ $\rho_{X,Y} = -1$ ou $\rho_{X,Y} = 1 \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \quad \mathbb{P}([Y = aX + b]) = 1$

Démonstration :

Remarque :
Si $Y = aX + b$, alors les valeurs de a et b sont faciles à obtenir :

$$a = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)} \qquad \text{et} \qquad b = E(Y) - aE(X)$$

Ces formules sont à mettre en parallèle des coefficients de la droite de régression du cours de statistique.