Table des matières

1 Couples de variables aléatoires discrètes.

Soient Ω un univers quelconque et un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

1.1 Introduction.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

on note $X(\Omega) = \{\ x_i \mid i \in I\ \}$ avec $\overbrace{I = [\![1;n]\!]}^{\text{finie}}$ ou $\overbrace{I = \mathbb{N}}^{\text{dénombrable}}$ (et $\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$)

$Y(\Omega) = \{\ y_i \mid i \in J\ \}$ avec $J = [\![1;n']\!]$ ou $J = \mathbb{N}$ (et $\forall (i,j) \in J^2, \quad i \neq j \Longrightarrow y_i \neq y_j$)

Définition.

L'application $(X,Y) : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$ est appelée couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

Remarque : $(X,Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$

1.2 Loi conjointe.

Définition.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

On appelle loi (conjointe) du couple (X,Y) l'application $\begin{array}{rcl} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y]) \end{array}$.

Remarques :

- Donner la loi conjointe du couple (X,Y) c'est :

$$\text{donner} \quad X(\Omega), \quad Y(\Omega) \quad \text{et donner pour tout } (i,j) \in I \times J, \quad \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

- Lorsque le nombre de valeurs est fini on présente souvent la loi conjointe sous forme de tableau.
- On pourra noter $(X = x, Y = y)$ l'événement $(X = x) \cap (Y = y)$.

Proposition. *(Système complet d'événements)*

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires finies sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

❶ Pour tous (x,y), (x',y') de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$$(x,y) \neq (x',y') \Longrightarrow (X = x, Y = y) \cap (X = x', Y = y') = \varnothing$$

❷ $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n'} (X = x_i, Y = y_j) = \Omega$

❸ La somme double $\displaystyle\sum_{j=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} P((X = x_i, Y = y_j))$ converge et sa somme vaut 1.

1.3 Lois marginales.

Définition.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

- la loi de probabilité de X est appelée **première loi marginale** du couple (X, Y),
- la loi de probabilité de Y est appelée **deuxième loi marginale** du couple (X, Y).

Proposition : *lien entre la loi conjointe et les lois marginales* :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

$$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}([X = x_i]) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right)$$

$$\forall j \in J, \quad \mathbb{P}([Y = y_j]) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right)$$

Justification : *C'est juste l'application de la formule des probabilités totales. (version avec les intersections)*

1.4 Indépendance de variables aléatoires.

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

Dire que X et Y sont indépendantes signifie que

$$\forall (i,j) \in I \times J, \quad \mathbb{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right) = \mathbb{P}([X = x_i]) \times \mathbb{P}([Y = y_j])$$

Remarques :
- Cela revient à dire que pour tout (i, j) les événements $[X = x_i]$ et $[Y = y_j]$ sont indépendants.
- Lorsque les variables sont indépendantes on peut construire la loi conjointe avec les lois marginales.
- Pour montrer que deux variables ne sont pas indépendantes, on cherche un couple (i, j) :

$$\mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \neq \mathbb{P}([X = x_i])\, \mathbb{P}([Y = y_j])$$

- Si une des deux variables X ou Y est constante, alors X et Y sont indépendantes.

1.5 Lois conditionnelles.

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

- Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$,

  La loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ est l'application $\begin{array}{ccc} Y(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ y & \longmapsto & \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) \end{array}$

  (Autrement dit : c'est la loi de Y pour la probabilité $\mathbb{P}_{[X=x]}$)
- Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$,

  La loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ est l'application $\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) \end{array}$

  (Autrement dit : c'est la loi de X pour la probabilité $\mathbb{P}_{[Y=y]}$)

Propositions : *(Loi conjointe / lois conditionnelles).*

$$\forall (i,j) \in I \times J, \quad \mathbb{P}\left([X = x_i] \cap (Y = y_j)\right) = \mathbb{P}([X = x_i]) \times \mathbb{P}_{[X=x_i]}([Y = y_j])$$

$$\forall (i,j) \in I \times J, \quad \mathbb{P}\left([X = x_i] \cap ([Y = y_j])\right) = \mathbb{P}([Y = y_j]) \times \mathbb{P}_{[Y=y_j]}([X = x_i])$$

Justification : *Cela découle directement de la définition d'une probabilité conditionnelle.*

Propositions : *(Lois marginales / lois conditionnelles).*

$$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}([X = x_i]) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}([Y = y_j]) \times \mathbb{P}_{[Y=y_j]}([X = x_i])$$

$$\forall j \in J, \quad \mathbb{P}([Y = y_j]) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}([X = x_i]) \times \mathbb{P}_{[X=x_i]}([Y = y_j])$$

Justification : *On applique la formule des probabilités totales. (Version avec les probabilités conditionnelles).*

1.6 Recherche de la loi de u(X,Y) sur des exemples.

Proposition.

Soient X et Y deux variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et u une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$,
Si la fonction u est définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et les variables aléatoires X et Y sont discrètes
alors $u(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$

Remarques : $u(X, Y)$ est la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le réel $u\big(X(\omega), Y(\omega)\big)$.

Exemples : $X + Y$, XY, $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$.

Proposition.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et u une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
on note $Z = u(X, Y)$, (et $Z(\Omega) = \{ \ z_k \mid k \in K \ \}$)
alors pour tout $k \in K$, $\mathbb{P}([Z = z_k]) = \displaystyle\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \, \mathbb{1}_{u(x_i, y_j) = z_k}$

ou encore

$$\text{pour tout } k \in K, \qquad \mathbb{P}([Z = z_k]) = \sum_{\substack{(i,j) \in I \times J \\ u(x_i, y_j) = z_k}} \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

On reprend la deuxième loi conjointe de la feuille_Cours_13

$N \backslash X_1$	0	1	2	3
1	$\frac{2}{27}$	0	0	$\frac{1}{27}$
2	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	0
3	0	$\frac{6}{27}$	0	0

La loi de $Y = N + X_1$:

y	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$							

La loi de $Z = \max(X_1, N)$:

z	1	2	3
$P(Z = z)$			

1.7 Espérance de u(X,Y) .

Conformément au programme on ne donne le théorème de transfert que pour deux variables aléatoires discrètes finies.

Théorème : (*Théorème de transfert*)

Soient X et Y deux variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et u une fonction de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$,
Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis :
la variable aléatoire $u(X, Y)$ admet *(toujours)* une espérance qui vérifie :

$$E(u(X, Y)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u(x_i, y_j) \, \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

2 Covariance. Variance d'une somme.

2.1 Définition.

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,
Si X, Y admettent une variance alors (X, Y) admet une covariance donnée par :

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E\Big((X - E(X))\,(Y - E(Y))\Big) \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Remarques :

① Quand $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$ on dit qu'elles sont décorrélées.

② Quand $\operatorname{cov}(X, Y) < 0$, en moyenne quand la valeur de X est grande, celle de Y a tendance à être petite.

③ Quand $\operatorname{cov}(X, Y) > 0$, en moyenne quand la valeur de X est grande , celle de Y a tendance à être grande.

④ On peut remplacer la condition d'existence "X, Y admettent une variance" par *(au choix)*

- X et Y admettent un moment d'ordre 2.
- X, Y et XY admettent une espérance.

⑤ Quand l'ensemble des valeurs est fini il n'y a pas de problème d'existence.

⑥ Pour a une constante : $\operatorname{cov}(X, a) = 0$ et $\operatorname{cov}(a, X) = 0$

2.2 Propriétés.

Propriétés : "*C'est une forme bilinéaire positive et symétrique*".

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ admettant une variance et a, b deux réels quelconques,

❶ $\operatorname{cov}(X, X) \geqslant 0$

❷ $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$

❸ $\operatorname{cov}(X\ ,\ aY + bZ) = a \operatorname{cov}(X, Y) + b \operatorname{cov}(X, Z)$

❹ $\operatorname{cov}(aX + bY\ ,\ Z) = a \operatorname{cov}(X, Z) + b \operatorname{cov}(Y, Z)$

Démonstration.

Proposition : *(complément)*

$$\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n'} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n'} a_i b_j \operatorname{cov}(X_i, Y_j)$$

2.3 Variance d'une somme.

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,
Si X et Y admettent une variance alors $X + Y$ admet une variance et :

$$V(X + Y) = V(X) + 2 \operatorname{cov}(X, Y) + V(Y)$$

Démonstration. *(Feuille_Cours_13)*

Corollaire

Pour a et b deux réels,

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + 2\,ab\,\mathrm{cov}(X,Y) + b^2V(Y)$$

Démonstration.

Proposition. *(Complément)*

Pour n variables aléatoires discrètes $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$

Si $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ admettent des variances, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ admet une variance et

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

Remarque :

Si Y est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant chacune une variance alors Y admet une variance.

2.4 Cas particuliers des variables aléatoires indépendantes.

Proposition :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant des variances,

❶ **Si** X et Y sont indépendantes **alors** $E(XY) = E(X)E(Y)$

❷ **Si** X et Y sont indépendantes **alors** $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$

Attention la réciproque est fausse. (voir le deuxième exemple de la Feuille_Cours_13)

Théorème.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

Si X et Y sont indépendantes **alors** $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Théorème.

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ des variables aléatoires discrètes

Si les X_k sont (mutuellement) indépendantes et admettent chacune une variance **alors**

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ admet une variance et } V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Remarque : *Ici l'indépendance deux à deux suffit. (complément)*

2.5 Coefficient de corrélation.

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

Si X, Y admettant des variances non nulles alors

on appelle **coefficient corrélation linéaire** du couple (X,Y) le réel : $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Théorème. (*complément*)

Pour toutes variables aléatoires discrètes X et Y admettant des variances non nulles on a :

❶ $-1 \leqslant \rho_{X,Y} \leqslant 1$

❷ $\rho_{X,Y} = -1$ ou $\rho_{X,Y} = 1 \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \quad \mathbb{P}([Y = aX+b]) = 1$

Démonstration : *(voir Feuille_Cours_13)*