BCPST 2$_A$

Correction du devoir à préparer pour le 31 mars 2025

Partie 1

A. Etude des variables X_i.

1) Cette expérience est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ; le succès étant : "obtenir une boule de couleur C_i" qui a pour probabilité p_i. X_i étant le nombre de succès on peut affirmer que :

$$\boxed{X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_i)}$$

On connaît l'espérance et la variance de cette loi usuelle :

$$\boxed{E(X_i) = np_i \quad \text{et} \quad V(X_i) = np_i(1 - p_i)}$$

2) a) On raisonne comme dans la première question avec pour succès : "obtenir une boule de couleur C_i ou C_j" qui a pour probabilité $p_i + p_j$

$$\boxed{X_i + X_j \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_i + p_j)}$$

On en déduit sa variance

$$\boxed{V(X_i + X_j) = n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j)}$$

b) On sait que $V(X_i + X_j) = V(X_i) + 2\,\text{cov}(X, Y) + V(X_j)$ donc

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X_i, X_j) &= \frac{1}{2}\big(V(X_i + X_j) - V(X_j) - V(X_j)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j) - np_i(1 - p_i) - np_j(1 - p_j)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(np_i(1 - p_i - p_j) + np_j(1 - p_i - p_j) - np_i(1 - p_i) - np_j(1 - p_j)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(- np_ip_j - np_jp_i\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{cov}\,(X_i, X_j) = -np_ip_j}$$

B. Remarquons que, ici, avec $s = 2$: $X_1 + X_2 = n, \quad p_1 + p_2 = 1$

1)

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} \\
&= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(n - X_1 - n(1 - p_1))^2}{np_2} \\
&= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_2} \\
&= \frac{(X_1 - np_1)^2}{n}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) \\
&= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1p_2} \qquad \text{car } p_1 + p_2 = 1
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{U_n = {Z_1}^2 \quad \text{où} \quad Z_1 = \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1p_2}}}$$

2) X_1 suit la loi binomiale de paramètres (n, p_1) donc ${X_1}^*$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(Théorème de Moivre-Laplace)

Or $Z_1 = \dfrac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1 - p_1)}} = {X_1}^*$

$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand, la loi de } Z_1 \text{ peut être approchée par la loi centrée réduite}}$

C. $s=3$

1) D'une part :

$$U_n = \frac{(X_1-\frac{n}{4})^2}{\frac{n}{4}} + \frac{(X_2-\frac{n}{4})^2}{\frac{n}{4}} + \frac{(X_3-\frac{n}{2})^2}{\frac{n}{2}}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
Z_1^2+Z_2^2 &= \frac{4}{n}\left(X_3-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{2}{n}(X_1-X_2)^2\\
&= \frac{2}{n}\left(X_3-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{2}{n}\left(X_3-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{2}{n}(X_1-X_2)^2\\
&= \frac{2}{n}\left(X_3-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{2}{n}\left(n-X_1-X_2-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{2}{n}(X_1-X_2)^2\\
&= \frac{2}{n}\left(X_3-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{2}{n}\left(\left((X_1-\frac{n}{4})+(X_2-\frac{n}{4})\right)^2+\left((X_1-\frac{n}{4})-(X_2-\frac{n}{4})\right)^2\right)\\
&= \frac{2}{n}\left(X_3-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{4}{n}\left(\left(X_1-\frac{n}{4}\right)^2+\left(X_2-\frac{n}{4}\right)^2\right) \qquad (a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2
\end{aligned}$$

On a bien :

$$\boxed{U_n = Z_1^2+Z_2^2}$$

2) $\quad Z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{n}}\left(X_3-\dfrac{n}{2}\right) \quad$ et $\quad Z_2 = \sqrt{\dfrac{2}{n}}\,(X_1-X_2)$

- la linéarité de $E(.)$ donne : $\quad E(Z_1) = \dfrac{2}{\sqrt{n}}\left(E(X_3)-\dfrac{n}{2}\right) \quad$ et $\quad E(Z_2) = \sqrt{\dfrac{2}{n}}\,(E(X_1)-E(X_2))$

  et on sait de plus que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n,\frac{1}{4})$, $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n,\frac{1}{4})$ et $X_3 \hookrightarrow \mathscr{B}(n,\frac{1}{2})$ donc

$$\boxed{E(Z_1)=0 \ \text{ et } \ E(Z_2)=0}$$

- la propriété $V(aX+b)=a^2V(X)$ donne : $V(Z_1)=\dfrac{4}{n}V(X_3)$ et comme $X_3 \hookrightarrow \mathscr{B}(n,\frac{1}{2})$ il vient :

$$\boxed{V(Z_1)=1}$$

$$\begin{aligned}
V(Z_2) &= \frac{2}{n}V(X_1-X_2)\\
&= \frac{2}{n}\big(V(X_1)-2\text{cov}(X_1,X_2)+V(X_2)\big)\\
&= \frac{2}{n}\left(\frac{3n}{16}+2\frac{n}{16}+\frac{3n}{16}\right) \qquad \textit{(d'après la question 2)b) pour la covariance)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{V(Z_2)=1}$$

-

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Z_1,Z_2) &= \text{cov}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\left(X_3-\frac{n}{2}\right);\sqrt{\frac{2}{n}}\,(X_1-X_2)\right)\\
&= \frac{2\sqrt{2}}{n}\,\text{cov}\left(X_3-\frac{n}{2}\,;\,X_1-X_2\right)\\
&= \frac{2\sqrt{2}}{n}\,\text{cov}\,(X_3\,;\,X_1-X_2)\\
&= \frac{2\sqrt{2}}{n}\,(\text{cov}\,(X_3\,;\,X_1)-\text{cov}\,(X_3\,;\,X_2))
\end{aligned}$$

or d'après la question 2)c) : $\text{cov}\,(X_3\,;\,X_1)=\text{cov}\,(X_3\,;\,X_2)$ donc

$$\boxed{\text{cov}\,(Z_1\,;\,Z_2)=0}$$

3) X_3 suit la loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$ donc $X_3{}^*$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(Théorème de Moivre-Laplace)

Or $\quad Z_1 = \dfrac{X_3 - \dfrac{n}{2}}{\sqrt{\dfrac{n}{4}}} = X_3{}^*$

$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand, la loi de } Z_1 \text{ peut être approchée par la loi centrée réduite}}$

4) a) Dans la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} T_i$ le nombre des 1 donne X_1 et le nombre de -1 donne X_2 donc

$$\boxed{X_1 - X_2 = \sum_{i=1}^{n} T_i}$$

b) La suite (T_n) est une suite de variables mutuellement indépendantes suivant toute la même loi de plus $E(T_i) = 0$ et $V(T_i) = E(T_i^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème central limite :

$\dfrac{\frac{X_1 - X_2}{n} - 0}{\sqrt{\frac{1}{2n}}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

or $\quad \dfrac{\frac{X_1 - X_2}{n} - 0}{\sqrt{\frac{1}{2n}}} = \sqrt{\dfrac{2}{n}}(X_1 - X_2)$

$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand, la loi de } Z_2 \text{ peut être approchée par la loi centrée réduite}}$

5) a)
```
import random as rd

def Tirage():
    s = []
    for k in range(100):
        x = rd.randint(0, 3)    # On prend un nombre au hasard dans 0, 1, 2, 3.
        if x == 0:
            s += [1]            # on ajoute 1 avec un probabilité égale 1/4
        elif x == 1:
            s += [2]            # on ajoute 2 avec un probabilité égale 1/4
        else:
            s += [3]            # on ajoute 3 avec un probabilité égale 1/2
    return s
```

b)
```
def Difference(C):
    s = 0
    for t in C:
        if t == 1:
            s += 1
        elif t == 2:
            s -= 1
    return s
```

D. $s = 4$.

1) $Y_i = \dfrac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ donc $\operatorname{cov}(Y_i\,;\,Y_j) = \dfrac{1}{n\sqrt{p_ip_j}}\operatorname{cov}(X_i\,;\,X_j)$

or on a vu dans la partie A :

$$\operatorname{cov}(X_i\,;\,X_i) = V(X_i) = np_i(1-p_i) \qquad \text{et} \quad \text{si} \;\; i \neq j, \quad \operatorname{cov}(X_i\,;\,X_i) = -np_ip_j$$

et les p_i sont égalent à $\dfrac{1}{4}$ donc pour $i \in [\![1;4]\!]$,

$$\operatorname{cov}(Y_i\,;\,Y_i) = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad \text{pour } (i,j) \in [\![1;4]\!]^2 \text{ tel que } i \neq j \quad \operatorname{cov}(Y_i\,;\,Y_j) = -\frac{1}{4}$$

on obtient ainsi la matrice M :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

On remarque alors que :

$$\boxed{M = I_4 - N}$$

2) a) On remarque que e_1, e_2, e_3, e_4 sont non nuls et $Ne_1 = Ne_2 = Ne_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Ne_4 = e_4$

donc

$$\boxed{e_1, e_2, e_3, e_4 \text{ sont des vecteurs propres de } N}$$

de plus on remarque que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille orthonormale de 4 vecteurs de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ (qui est de dimension 4) donc

$$\boxed{(e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ est une base de } \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$$

b) Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ vers une base orthonormale donc Q est inversible et $Q^{-1} = Q^T$ donc

$$\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

c) (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de vecteurs propres de N associés respectivement aux valeurs propres $0, 0, 0, 1$ donc

$$Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comme $Q^{-1}(I-N)Q = I - Q^{-1}NQ$ on en déduit que

$$Q^{-1}(I-N)Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et sachant que $Q^{-1} = Q^T$ et $M = I - N$, on peut conclure :

$$\boxed{Q^TMQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

3) a) $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} Z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 - Y_2) \\ Z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(Y_1 + Y_2 - 2Y_3) \\ Z_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(Y_1 + Y_2 + Y_3 - 3Y_4) \\ Z_4 = \dfrac{1}{2}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \end{cases}$

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 &= \frac{X_1 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} + \frac{X_2 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} + \frac{X_3 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} + \frac{X_4 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \\ &= \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - n}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{Z_4 = 0}$$

b) $\begin{cases} Z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 - Y_2) \\ Z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(Y_1 + Y_2 - 2Y_3) \\ Z_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(Y_1 + Y_2 + Y_3 - 3Y_4) \end{cases}$ donc *(linéarité)* $\begin{cases} E(Z_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(E(Y_1) - E(Y_2)) \\ E(Z_2) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(E(Y_1) + E(Y_2) - 2E(Y_3)) \\ E(Z_3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) - 3E(Y_4)) \end{cases}$

or les Y_i ont toutes la même espérance donc

$$\boxed{\text{pour } i = 1, 2, 3, \quad E(Z_i) = 0}$$

c)

$$\begin{aligned} U_n &= (Y_1 \ \ Y_2 \ \ Y_3 \ \ Y_4) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} \\ &= \left(Q \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} \right)^T Q \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} \\ &= (Z_1 \ \ Z_2 \ \ Z_3 \ \ Z_4)\, Q^T Q \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} \\ &= (Z_1 \ \ Z_2 \ \ Z_3 \ \ Z_4) \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} \qquad \textit{car } Q^T Q = I_4 \\ &= Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 \end{aligned}$$

or $Z_4 = 0$ donc

$$\boxed{U_n = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2.}$$

Partie 2

1) a) *(croissance comparées)*

$$\begin{aligned} x^{\frac{r}{2}+1}e^{-\frac{x}{2}} &= \exp\left(-\frac{x}{2}+\ln(x)\left(\frac{r}{2}+1\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x}{2}\left(1-2\,\frac{\ln(x)}{x}\left(\frac{r}{2}+1\right)\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x^{\frac{r}{2}+1}e^{-\frac{x}{2}} \text{ tend vers } 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty}$$

b) La limite précédente permet d'affirmer *(définition d'une limite)*

$$\text{qu'il existe un réel } A>0 \text{ tel que } \forall x>A,\ \ x^{\frac{r}{2}+1}e^{-\frac{x}{2}} \leqslant 1$$

il vient bien :

$$\boxed{\text{il existe un réel } A>0 \text{ tel que : } \quad \forall x>A,\ \ x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{x^2}}$$

c) La fonction $x \longmapsto x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$ est continue sur $[0;+\infty[$,
l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ est impropre en $+\infty$ il suffit d'étudier pour $A>0$ la convergence de

$$\int_A^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$$

en prenant un A défini à la question b) on a $\forall x>A,\ \ 0 \leqslant x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$

or $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge *(En effet* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *)*

donc en appliquant le théorème de convergence par comparaison des intégrandes positifs ou nuls,

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$$

2) a) La fonction $x \longmapsto x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}$ est continue sur $[t;+\infty[$,
l'intégrale $\displaystyle\int_t^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ est impropre en $+\infty$ il suffit d'étudier la convergence de

$$\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$$

or $\forall x>1,\ \ 0 \leqslant x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}} \leqslant e^{-\frac{x}{2}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge *(En effet* $\displaystyle\int e^{-\frac{x}{2}} = -2e^{-\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *)*

donc en appliquant le théorème de convergence par comparaison des intégrandes positifs ou nuls,

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_t^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$$

b)

$$\int_t^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_t^{+\infty} 2\,e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

La fonction $\varphi : x \longmapsto \sqrt{x}$ est C^1 et strictement croissante sur $[t;+\infty[$
donc (changement de variable $(u=\sqrt{x})$) :

$$\int_t^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \ \text{ et } \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} 2e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \text{ sont de même nature et égales en cas de convergence.}$$

Ces deux intégrales convergent et on sait que $\Phi(\sqrt{t}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\sqrt{t}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$

On en déduit :

$$\boxed{G(t) = 2\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(\sqrt{t})}$$

c) Φ est continue en 0 et $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{t\to 0} G(t) = \sqrt{2\pi}$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\, dx \text{ converge et } \; J_1 = \sqrt{2\pi}}$$

3) Soit r un entier naturel non nul. On définit la fonction f_r par :

$$\forall x > 0, \quad f_r(x) = \frac{1}{J_r} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \forall x \leqslant 0, \quad f_r(x) = 0$$

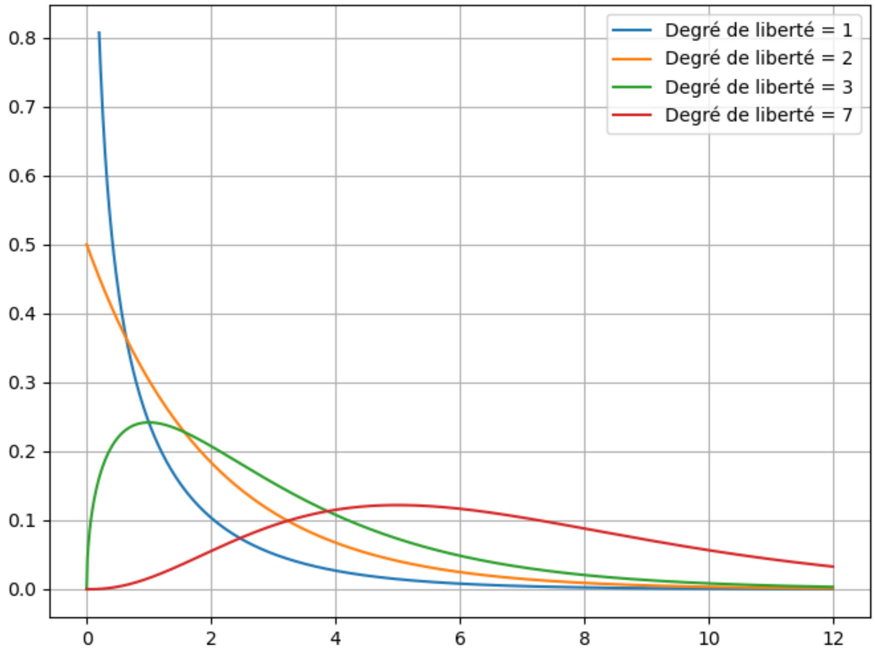
a) ❶ f_r est continue sauf éventuellement en 0.
❷ f_r est à valeurs positives ou nulles.
❸ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(x)\, dx = 1$ *En effet dans 1) et 2) on a montré la convergence et défini* $J_r = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$

$$\boxed{f_r \text{ est une densité de probabilité.}}$$

b) Pour $r = 2$ on remarque que $J_2 = 2$ et ainsi $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)$

$$\boxed{\text{Pour } r = 2 \text{ on reconnait la loi exponentielle de paramètre } \frac{1}{2}}$$

c) La limite en 0 de f_1 est infini C_{f_1} est en bleu.
La limite en 0 de f_2 est infini C_{f_2} est en orange.
f_3 n'est pas dérivable en 0 est infini C_{f_3} est en vert.
La dernière C_{f_7} est en rouge.

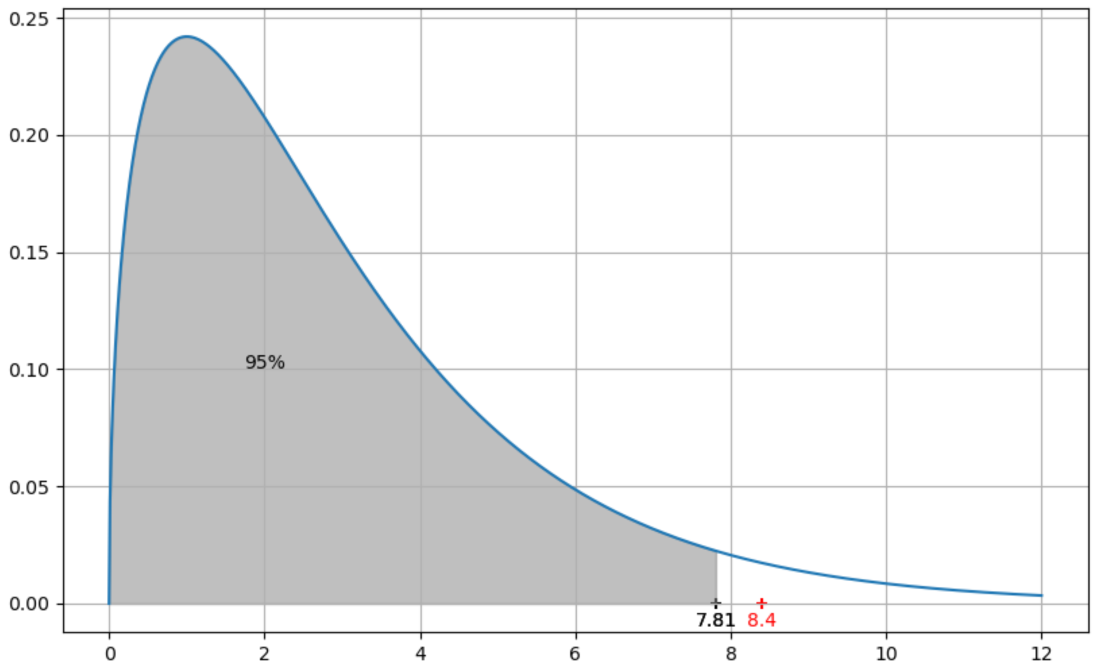


Partie 3

Voir la feuille_info_18 qui revient sur cette dernière partie.

En supposant que la répartition est uniforme seulement 5% des échantillons donnent des valeurs du Khi-2 supérieures à 7,81.

Or ici on observe un Khi-2 égale à 8,4, c'est peu probable.



$\boxed{\text{On rejette l'hypothèse d'une répartition uniforme}}$