

Correction DM 10 : sujet 2021 Méthodes de calcul et de raisonnement Partie II

7. Cette expérience est constituée de N épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (succès : l'individu est de type 1, avec une probabilité p_1)

N_1 est le nombre de succès donc N_1 suit la loi binomiale de paramètres (N, p_1)

8. C'est une loi usuelle : $E(N_1) = Np_1$ et $V(N_1) = Np_1(1 - p_1)$

9. $N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p_1)$ donc d'après le théorème de Moivre-Laplace $\frac{N_1 - Np_1}{\sqrt{Np_1(1 - p_1)}}$ converge en loi vers une variable X où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(a \leq \frac{N_1 - Np_1}{\sqrt{Np_1(1 - p_1)}} \leq b \right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

10. (a) La matrice W est réelle et symétrique (En effet : $\text{cov}(N_2, N_1) = \text{cov}(N_1, N_2)$)

W est diagonalisable.

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(N_1) & \text{cov}(N_1, N_2) \\ \text{cov}(N_1, N_2) & V(N_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aV(N_1) + b\text{cov}(N_1, N_2) \\ a\text{cov}(N_1, N_2) + bV(N_2) \end{pmatrix} \\ &= a^2V(N_1) + ab\text{cov}(N_1, N_2) + ab\text{cov}(N_1, N_2) + b^2V(N_2) \\ &= a^2V(N_1) + 2ab\text{cov}(N_1, N_2) + b^2V(N_2) \end{aligned}$$

$$\text{or } V(aN_1 + bN_2) = \text{cov}(aN_1 + bN_2; aN_1 + bN_2) = a^2V(N_1) + 2ab\text{cov}(N_1, N_2) + b^2V(N_2)$$

(bilinéarité)

donc

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = V(aN_1 + bN_2)$$

- (c) Soit $\lambda \in \text{Sp}(W)$, on note $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que : $WX = \lambda X$

on sait que $WX = \lambda X$ donc $X^\top WX = \lambda X^\top X$

et en utilisant b) on en déduit que $V(aN_1 + bN_2) = \lambda(a^2 + b^2)$

on sait de plus que $V(aN_1 + bN_2) \geq 0$ (c'est une variance) et $a^2 + b^2 > 0$ (car $X \neq 0$)

on en déduit que $\lambda \geq 0$ et ainsi :

$$\text{Sp}(W) \subset \mathbb{R}_+$$

- (d) *Question délicate, j'ai d'ailleurs dit une bêtise à Lucien.*

Raisonnons par l'absurde en supposant 0 est une valeur propre de W ,

on aurait alors $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $V(aN_1 + bN_2) = 0$ donc tel que la variable $aN_1 + bN_2$ est quasi-certaine.

- $P((N_1 = 0) \cap (N_2 = 0)) = p_3^N \neq 0$ donc $P(aN_1 + bN_2 = 0) \neq 0$
- $P((N_1 = 1) \cap (N_2 = 0)) = Np_1p_3^{N-1} \neq 0$ donc $P(aN_1 + bN_2 = a) \neq 0$
- $P((N_1 = 0) \cap (N_2 = 1)) = Np_2p_3^{N-1} \neq 0$ donc $P(aN_1 + bN_2 = b) \neq 0$

et la variable $aN_1 + bN_2$ est quasi-certaine ce qui entrainerait $a = b = 0$ ce qui est impossible.

En conclusion :

$$\text{Sp}(W) \subset \mathbb{R}_+^*$$

- (e) La matrice W est réelle et symétrique donc elle est diagonalisable dans une base orthonormale.

il existe deux matrices P inversible et $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ telles que : $P^{-1} = P^\top$ et $W = P\Delta P^{-1}$

or d'après d) $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ donc on peut poser $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$

on a bien montrer l'existence P et D dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\boxed{D \text{ est diagonale et inversible, } P \text{ inversible avec } P^{-1} = P^\top \text{ et } W = PD^2P^{-1}}$$

11. $A = D^{-1}P^{-1} = D^{-1}P^\top$ donc $A^\top = PD^{-1}$ ce qui donne $AWA^\top = D^{-1}P^{-1}WPD^{-1}$
or $W = PD^2P^{-1}$ donc $AWA^\top = I_2$ et ainsi :

$$\boxed{V(Y_1) = 1, V(Y_2) = 1 \text{ et } \text{cov}(Y_1, Y_2) = 0}$$

12. (a) $N_1 + N_2 = N - N_3$ donc $V(N_1 + N_2) = V(N_3)$
et N_3 suit une loi binomiale de paramètres (N, p_3) donc

$$\boxed{V(N_1 + N_2) = Np_3(1 - p_3)}$$

- (b) On sait que : $V(N_1 + N_2) = V(N_1) + 2\text{cov}(N_1, N_2) + V(N_2)$

$$\begin{aligned} \text{cov}(N_1, N_2) &= \frac{1}{2}(V(N_1 + N_2) - V(N_1) - V(N_2)) \\ &= \frac{1}{2}(Np_3(1 - p_3) - Np_1(1 - p_1) - Np_2(1 - p_2)) \\ &= \frac{N}{2}(p_3(p_1 + p_2) - p_1(p_2 + p_3) - p_2(p_1 + p_3)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{cov}(N_1, N_2) = -Np_1p_2}$$

- (c) On a avec les résultats la matrices W :

$$W = \begin{pmatrix} Np_1(1 - p_1) & -Np_1p_2 \\ -Np_1p_2 & Np_2(1 - p_2) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} p_1(p_2 + p_3) & -p_1p_2 \\ -p_1p_2 & p_2(p_1 + p_3) \end{pmatrix}$$

donc (inverse d'une matrice 2×2)

$$\boxed{W^{-1} = \frac{1}{Np_1p_2p_3} \begin{pmatrix} p_2(p_1 + p_3) & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_1(p_2 + p_3) \end{pmatrix}}$$

- (d) $AWA^\top = I_2$ et A est une matrice carrée donc $WA^\top A = I_2$ et comme W est aussi carrée :

$$\boxed{A^\top A = W^{-1}}$$

$$\begin{aligned} Y_1^2 + Y_2^2 &= \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix}^\top A^\top A \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix}^\top W^{-1} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{Np_1p_2p_3} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} p_1p_2 + p_2p_3 & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_1p_2 + p_1p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{Np_3} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{Np_1p_2} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} p_2 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{Np_3} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} Np_3 - N_3 \\ Np_3 - N_3 \end{pmatrix} + \frac{(N_1 - Np_1)^2}{Np_1} + \frac{(N_2 - Np_2)^2}{Np_2} \\ &= \frac{Np_3 - N_3}{Np_3} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(N_1 - Np_1)^2}{Np_1} + \frac{(N_2 - Np_2)^2}{Np_2} \\ &= \frac{Np_3 - N_3}{Np_3} (Np_3 - N_3) + \frac{(N_1 - Np_1)^2}{Np_1} + \frac{(N_2 - Np_2)^2}{Np_2} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{Y_1^2 + Y_2^2 = \frac{(N_1 - Np_1)^2}{Np_1} + \frac{(N_2 - Np_2)^2}{Np_2} + \frac{(N_3 - Np_3)^2}{Np_3}}$$