

Correction du sujet : Méthode de calcul et raisonnement (2024).

1. (a) Soit $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \binom{p+1}{j+1} \cdot \frac{1}{p+1} &= \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p-j)!} \cdot \frac{1}{p+1} \\ &= \frac{(p+1) \cdot p!}{(j+1) \cdot j! (p-j)!} \cdot \frac{1}{p+1} \\ &= \frac{1}{j+1} \cdot \binom{p}{j} \end{aligned}$$

Pour tout $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $\binom{p}{j} \cdot \frac{1}{j+1} = \binom{p+1}{j+1} \cdot \frac{1}{p+1}$

(b) Soit $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j} &= \frac{p!}{(j+1)! (p-j-1)!} + \frac{p!}{j! (p-j)!} \\ &= \frac{p! (p-j)}{(j+1)! (p-j)!} + \frac{p! (j+1)}{(j+1)! (p-j)!} \\ &= \frac{p! (p+1)}{(j+1)! (p-j)!} \\ &= \binom{p+1}{j+1} \end{aligned}$$

Pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j}$

2. $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ est une densité de X $x \mapsto (1 - e^{-\lambda t}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ est la fonction de répartition de X .

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

3. (a) Pour $i \geq 2$

$t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[i-1; i+1]$ donc $\int_i^{i+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{i} \leq \int_{i-1}^i \frac{1}{t} dt$

En effet :

d'une part : $\forall t \in [i-1, i], \frac{1}{i} \leq \frac{1}{t}$ donc $\frac{1}{i} \leq \int_{i-1}^i \frac{1}{t} dt$,

d'autre part : $\forall t \in [i, i+1], \frac{1}{t} \leq \frac{1}{i}$ donc $\int_i^{i+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{i}$

(b) Pour $n \geq 2$, $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln(n)} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

or $\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

$\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$

(c) On note $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

En sommant la relation de la question 3 (a) pour i allant de 2 à un entier $n \geq 2$, et en utilisant la relation de Chasles on obtient :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

On en déduit :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq A_n - 1 \leq \ln(n)$$

Ce qui nous donne l'encadrement :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{\ln(2)+1}{\ln(n)} \leq \frac{A_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

donc (*théorème des gendarmes*) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{\ln(n)} = 1$, ou encore :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)}$$

4. Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(X_{(1)} > x) &= P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i > x)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i > x) \quad (\text{Indépendance des } X_i) \\ &= \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x} \\ &= e^{-n\lambda x} \end{aligned}$$

donc $\forall x \geq 0, P(X_{(1)} \leq x) = 1 - e^{-n\lambda x}$

de plus on a : $\forall x < 0, P(X_{(1)} \leq x) = 0$ On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(n\lambda)$

$$\boxed{X_{(1)} \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } n\lambda}$$

5. $X_{(n)}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(X_{(n)} \leq x) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) \quad (\text{Indépendance des } X_i) \\ &= \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda x}) \\ &= (1 - e^{-\lambda x})^n \end{aligned}$$

La fonction de répartition de $X_{(n)}$ est donc la fonction $x \mapsto (1 - e^{-\lambda x})^n \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf en 0 donc $X_{(n)}$ est une variable aléatoire à densité et en dérivant sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0; +\infty[$ on obtient une densité de $X_{(n)}$:

$$\boxed{x \mapsto n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)}$$

6. on note f la fonction précédente,

$X_{(n)}$ admet une espérance si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est absolument convergente

ou encore si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} x n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx$ est convergente ;

$$\text{et alors } E(X_{(n)}) = \int_0^{+\infty} x n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx$$

Soit $A > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^A x n \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx &= \int_0^A x n \lambda e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j e^{-\lambda j x} dx \\ &= n \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^A x e^{-\lambda(j+1)x} dx \end{aligned}$$

or quel que soit j , $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda(j+1)x} dx$ converge (*Espérance d'une loi exponentielle*)
donc

$$X_{(n)} \text{ admet une espérance et } E(X_{(n)}) = n \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda(j+1)x} dx$$

Connaissant l'espérance de la loi $\mathcal{E}(\lambda(j+1))$ on a : $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda(j+1)x} dx = \frac{1}{\lambda^2(j+1)^2}$
donc

$$E(X_{(n)}) = n \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{(-1)^j}{\lambda^2(j+1)^2}$$

ce qui donne avec la relation de la question 1)(a) :

$$E(X_{(n)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1}$$

7. (a) La formule du binôme donne : $\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k = (1 + (-1))^{p+1}$ donc

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k = 0$$

(b) • Pour $p = 1$,

$$\sum_{j=0}^{1-1} \binom{1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \binom{1}{1} \frac{(-1)^0}{1} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1$$

La propriété est bien vérifiée pour $p = 1$

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} &= \frac{(-1)^p}{p+1} + \sum_{j=0}^{p-1} \left(\binom{p}{j} + \binom{p+1}{j} \right) \frac{(-1)^j}{j+1} && \text{Formule de la question 1)(b)} \\ &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{j+1} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{p+1} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} && (\text{Question 1)(a) et hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^{p+1} \binom{p+1}{j} (-1)^{j+1} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \end{aligned}$$

or le résultat de la question 7(a) donne : $\sum_{j=1}^{p+1} \binom{p+1}{j} (-1)^{j+1} = 1$ et ainsi on a bien

$$\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k}$$

En conclusion on a bien :

$$\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$$

8. Les deux questions précédentes donnent la relation : $E(X_{(n)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$,
et avec le résultat de la question 3)(c) il vient :

$$E(X_{(n)}) \sim \frac{\ln(n)}{\lambda}$$

9. On remarque que $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

or le DL₂(0) de $\ln(1+x)$ est $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donne $-x + \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\frac{1}{2(n+1)^2} \sim \frac{1}{2n^2}$ donc :

$$u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

Appliquons le théorème de convergence pour deux séries.

On a : $u_n - u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, $\frac{1}{2n^2} \geq 0$ et $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge donc $\sum(u_n - u_{n+1})$ est convergente.
ce qui entraîne :

$$\sum(u_{n+1} - u_n) \text{ est convergente}$$

10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1$ (somme télescopique)

or on vient de montrer que $\sum(u_n - u_{n+1})$ est convergente donc

$$\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}$$

11. • f est continue sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs positives ou nulles.

- Etudions l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ qui est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

On remarque que $F : x \mapsto \exp(-\lambda \exp(-x))$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
de plus le théorème de composition des limites donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.

En conclusion :

$$f \text{ est bien une densité de probabilité}$$

12. X_1 est à valeurs dans $]0; +\infty[$, donc $Y = \ln(X_1)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et pour $y > 0$,

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(-\ln(X_1) \leq y) \\ &= P(X_1 \geq e^{-y}) \\ &= \exp(-\lambda e^{-y}) \quad \text{car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad \text{et } e^{-y} > 0 \end{aligned}$$

La fonction de répartition de Y est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc Y est à densité et en dérivant on obtient :

$f : y \mapsto \lambda e^{-y} \exp(-\lambda e^{-y})$ est une densité de Y .

$$Y = \ln(X_1) \text{ suit la loi de Gumbel.}$$

13. Soit $x \in \mathbb{R}$,

pour n assez grand, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$

$$\text{or} \quad n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \frac{x}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} x \quad (\text{Raisonnement vrai même si } x = 0)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^x$

14. On note $Z_n = X_{(n)} - \ln(n)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et n assez grand (*),

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq x) &= P(X_{(n)} - \ln(n) \leq x) \\ &= P(X_{(n)} \leq \ln(n) + x) \\ &= (1 - e^{-(x + \ln(n))n})^n \quad \text{d'après la question 5. et avec } x + \ln(n) > 0 \quad (*) \\ &= \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \exp(-\exp(-x)) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} P(Y \leq x) \end{aligned}$$

donc $(X_{(n)} - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y qui suit une loi de Gumbel de paramètre 1

Problème 2

15. Pour tout couple (i, j) dans $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$\begin{aligned} ((AB)^T)_{i,j} &= (AB)_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^p (A)_{j,k} (B)_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^p (A^T)_{k,j} (B^T)_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^p (B^T)_{i,k} (A^T)_{k,j} \\ &= (B^T A^T)_{i,j} \end{aligned}$$

comme ceci est vrai pour tout (i, j) on a bien :

$(AB)^T = B^T A^T$

16. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que M est inversible

on a : $M^T \times (M^{-1})^T \underset{(*)}{=} (M^{-1}M)^T = (I_n)^T = I_n \quad ((*) \text{ d'après 15.})$

et $(M^{-1})^T \times M^T \underset{(*)}{=} (MM^{-1})^T = (I_n)^T = I_n$

Si M est inversible alors M^T est inversible et l'inverse de M^T est $(M^{-1})^T$

17. Raisonnons par double inclusion :

- Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, Si $AX = 0$ alors $A^T AX = 0$ donc $\ker(A) \subset \ker(A^T A)$
- Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, Si $A^T AX = 0$ alors $X^T A^T AX = 0$ donc $\|AX\|^2 = 0$ et ainsi $AX = 0$ ce qui prouve :

$$\ker(A^T A) \subset \ker(A)$$

$\ker(A^T A) = \ker(A)$

18. La matrice $A^T A$ est symétrique à coefficients réels donc $A^T A$ est diagonalisable

19. Sur cet exemple

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{On note } M \text{ cette matrice})$$

- d'une part on remarque que $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (de rang 1)

donc 3 est une valeur propre de M , $\dim(E_3(M)) = 2$

$$\text{et } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_3(M)$$

- d'autre part on remarque que : $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 0.

Sachant que M est une matrice 3×3 les points précédents permettent d'affirmer que

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ formée de vecteurs propres de } M$$

Autrement dit :

En posant : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a : P inversible et $A^T A = P D P^{-1}$

20. La définition de la liberté des C_i est :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad x_1 C_1 + \dots + x_p C_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_i = 0$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad A X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui entraîne que $\ker(A) \subset \{0\}$ et comme $0 \in \ker(A)$ il vient $\ker(A) = \{0\}$

Puis en utilisant le résultat de la question 17. il vient $\ker(A^T A) = \{0\}$,

or la matrice $A^T A$ est une matrice 3×3 donc (un endomorphisme est bijectif si, et seulement s'il est injectif)

$A^T A$ est inversible

21. (a) On utilise ici la formule de la question 15. (plutôt sa généralisation à 3 matrices)

$$\begin{aligned} H^2 &= A(A^T A)^{-1} A^T A (A^T A)^{-1} A^T \\ &= A \times I_p \times (A^T A)^{-1} A^T \\ &= A(A^T A)^{-1} A^T = H \end{aligned}$$

$H^2 = H$

On utilise ici la formule des questions 15. et 16.

$$\begin{aligned} H^T &= (A(A^T A)^{-1} A^T)^T \\ &= (A^T)^T ((A^T A)^{-1})^T A^T \\ &= A(A^T A)^{-1} A^T = H \end{aligned}$$

$H^T = H$

(b) On raisonne encore par double inclusion :

- Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, Si $HX = 0$ alors $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y^T HX = 0$ ou encore $(HY)^T X = 0$ donc

$$\ker(H) \subset (\text{Im}(H))^\perp$$

- Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

si $X \in (\text{Im}(H))^T$ alors $X^T HX = 0$ donc $X^T H^2 X = 0$, puis $\|HX\|^2 = 0$ et ainsi $HX = 0$ ce qui prouve :

$$(\text{Im}(H))^T \subset \ker(H)$$

$$\boxed{\ker(H) = (\text{Im}(H))^\perp}$$

Remarque : (venant de la correction d'un collègue) On peut remplacer le deuxième point par :

sachant que $\dim(\text{Ker}(H)) + \dim(\text{Im}(H)) = n$ et $\dim((\text{Im}(H))^\perp) + \dim(\text{Im}(H)) = n$

on a $\dim(\text{Ker}(H)) = \dim((\text{Im}(H))^\perp)$ et ainsi la première inclusion suffit pour conclure.

(c) Encore des doubles inclusions

- $H = A(A^T A)^{-1} A^T$ donc $\ker(A^T) \subset \ker(H)$ et
- $A^T H = A^T$ donc $\ker(H) \subset \ker(A^T)$

$$\boxed{\ker(H) = \ker(A^T)}$$

- $H = A(A^T A)^{-1} A^T$ donc $\text{Im}(H) \subset \text{Im}(A)$ et
- $HA = A$ donc $\text{Im}(A) \subset \text{Im}(H)$

$$\boxed{\text{Im}(H) = \text{Im}(A)}$$

22. $H^2 = H$ donc $B - HB \in \ker(H)$, $\text{Im}(A) = \text{Im}(H)$ donc $HB - AX \in \text{Im}(H)$

or $\ker(H) = (\text{Im}(H))^\perp$ donc le théorème de Pythagore donne :

$$\|B - AX\|^2 = \|B - HB\|^2 + \|HB - AX\|^2$$

donc $\|B - AX\|^2 \leq \|B - HB\|^2$

$$\begin{aligned} \text{de plus } \|HB - AX\|^2 = 0 &\iff HB = AX \\ &\iff A((A^T A)^{-1} A^T B - X) = 0 \\ &\iff (A^T A)^{-1} A^T B - X = 0 \quad \text{car } \ker(A) = \{0\} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{g \text{ admet un minimum global atteint en unique point : } \hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T B}$$

23. Si $n = p$ alors A est inversible et on obtient $\hat{X} = A^{-1}B$ ce qui est cohérent car alors on a $g(\hat{X}) = 0$
 $\hat{X}$ est l'unique solution du système $AX = B$.

$$\textbf{24. } A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad (A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^T B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \hat{X} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{X} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$$