Correction du sujet : Méthodes de calcul et raisonnement (2023).

Partie 1.

1. Soit x un réel quelconque,

la série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{\lambda x}$ donc

Quel que soit le réel x , $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda}$ existe et $S(x) = e^{\lambda(x-1)}$

- 2. • D'une part g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (somme de fonctions dérivables)
 et pour $x \geq 0$, $g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ donc $g' \geq 0$ sur $[0, 1]$ et $g' \leq 0$ sur $[1; +\infty[$
 et ainsi : g est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$
- D'autre part : $g(1) = \frac{1}{e} - 1$ et $e > 1$ donc $g(1) < 0$.

En conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) < 0$

- 3. On suppose que $0 < \lambda \leq 1$ et on note : $\phi : x \mapsto f(x) - x = e^{\lambda(x-1)} - x$
 ϕ est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$, $\phi'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1$ et $\phi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda(x-1)}$
- D'une part : ϕ' est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ (En effet : $\phi'' > 0$ sur cet intervalle)
- d'autre part : $\phi'(1) = \lambda - 1 (\leq 0 \text{ car } \lambda \leq 1)$

donc ϕ est strictement décroissante sur $[0, 1]$

de plus $\phi(1) = 0$ donc 1 est la seule solution de l'équation $\phi(x) = 0$ sur $[0, 1]$
 on a bien :

Si $\lambda \leq 1$ alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, 1]$ (cette solution est 1)

- 4. On suppose que $1 < \lambda$ et on note toujours : $\phi : x \mapsto f(x) - x = e^{\lambda(x-1)} - x$
 ϕ est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$, $\phi'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1$ et $\phi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda(x-1)}$
 - D'une part : ϕ' est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ (En effet : $\phi'' > 0$ sur cet intervalle)
 - d'autre part : $\phi'(0) = \lambda e^{-\lambda} - 1 = g(\lambda) (< 0 \text{ d'après } 2.)$ et $\phi'(1) = \lambda - 1 (> 0 \text{ car } 1 < \lambda)$
- donc il existe un unique $\alpha \in]0, 1[$, $\phi'(\alpha) = 0$

On peut alors dresser le tableau de variations de ϕ sur l'intervalle $[0, 1]$:

x	0	α	1
$\phi'(x)$	-	0	+
ϕ	$e^{-\lambda}$	$\phi(\alpha)$	0

ce qui permet d'affirmer que :

Si $\lambda > 1$ alors l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $[0, 1]$

Remarque : une de ces deux solutions est 1 et on peut compléter le tableau de variations précédents avec la définition de x_λ :

x	0	x_λ	α	1
$\phi'(x)$	-	0	+	
ϕ	$e^{-\lambda}$	0	$\phi(\alpha)$	0

5. T_1 suit la loi de Poisson de paramètre t_1 donc $E(T_1) = t_1$ et $V(T_1) = t_1$

6. $T_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $T_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(T_1 + T_2)(\Omega) \subset \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet : $([T_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 P([T_1 + T_2 = n]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([T_1 = k] \cap [T_1 + T_2 = n]) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([T_1 = k] \cap [T_2 = n - k]) \\
 &= \sum_{k=0}^n P([T_1 = k] \cap [T_2 = n - k]) \quad \text{car pour } k > n \quad [T_2 = n - k] = \emptyset \\
 &= \sum_{k=0}^n P([T_1 = k]) \times P([T_2 = n - k]) \quad \text{car } T_1 \text{ et } T_2 \text{ sont indépendantes} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{t_1^k}{k!} e^{-t_1} \times \frac{t_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-t_2} \\
 &= \frac{e^{-t_1-t_2}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t_1^k t_2^{n-k} \\
 &= \frac{e^{-(t_1+t_2)}}{n!} (t_1 + t_2)^n \quad \text{Formule du binôme.}
 \end{aligned}$$

Remarque : Après ce calcul on peut affirmer que $(T_1 + T_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\boxed{T_1 + T_2 \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } t_1 + t_2}$$

Remarque : c'est vrai quels que soient t_1 et t_2 donc on a redémontré le théorème au programme :

Soient λ_1 et λ_2 deux réels strictement positifs,

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$

alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

7. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\sum_{k=1}^n T_k}_{\mathcal{P}(n)}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k$

• Pour $n = 1$,

T_1 suit la loi de Poisson de paramètre t_1 et $\sum_{k=1}^1 t_k = t_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie,

$$\sum_{k=1}^{n+1} T_k = \sum_{k=1}^n T_k + T_{n+1}$$

or (lemme de coalition) les deux variables aléatoires $\sum_{k=1}^n T_k$ et T_{n+1} sont indépendantes

et par hypothèse de récurrence $\sum_{k=1}^n T_k \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n t_k\right)$ et on a : $T_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(t_{n+1})$

on peut en déduire avec le résultat de 6. que : $\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} T_k}_{\mathcal{P}(n+1)} \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n t_k + t_{n+1}\right)$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n T_k \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \sum_{k=1}^n t_k}$$

8. En notant A une primitive de la fonction a sur l'intervalle I , (A existe car a est continue sur I)
L'ensemble des solutions de (E_1) est

$$S_{(E_1)} = \left\{ \begin{array}{l|l} I \longrightarrow \mathbb{R} & c \in \mathbb{R} \\ t \longmapsto ce^{A(t)} & \end{array} \right\}$$

9. Soit f une solution de (E_1) s'annulant en $t_0 \in I$,
il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I, f(t) = ce^{A(t)}$ et sachant que $f(t_0) = 0$ il vient $ce^{A(t_0)} = 0$,
donc finalement comme $e^{A(t_0)} \neq 0$ on a nécessairement $c = 0$ ce qui entraîne que f est nulle.
On a bien montré que :

Si f est une solution de (E_1) qui s'annule sur I alors f est la fonction nulle sur I

10. On note $f = g - C$, f est dérivable et pour $t \in I$

$$\begin{aligned} f'(t) &= g'(t) \\ &= b(g(t))(g(t) - C) \\ &= b(g(t))f(t) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$g - C$ est solution de $(E_3) : y'(t) = b(g(t))y(t)$

11. On vient de montrer que $g - C$ est solution d'une équation de la forme : $y'(t) = a(t)y(t)$ avec a une fonction continue sur I .
donc (d'après 9.) si $g - C$ s'annule sur I alors elle est nulle sur I ,

S'il existe $t_0 \in I$ tel que $g(t_0) = C$, alors g est constante sur I

Partie II

12. • $p_0 = P(Z_0 = 0)$ or $Z_0 = 1$ donc $p_0 = 0$
• $p_1 = P(Z_1 = 0)$ or $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ donc $p_1 = e^{-\lambda}$
•

$$\begin{aligned} p_2 &= P(Z_2 = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k)P(Z_2 = 0 | Z_1 = k) \\ &\quad \text{Sachant } (Z_1 = k), Z_2 \text{ est la somme de } k \text{ variables indépendantes suivant la loi } \mathcal{P}(\lambda) \\ &\quad \text{donc sachant } (Z_1 = k), Z_2 \text{ suit la loi } \mathcal{P}(\lambda k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \times e^{-\lambda k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k (e^{-\lambda})^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= S(e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

$p_2 = \exp(\lambda(e^{-\lambda} - 1))$

13. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si Z_n prend la valeur 0 alors $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^0 X_{n,k}$ prend la valeur 0 donc
 $A_n \subset A_{n+1}$ ce qui entraîne que : $p_n \leq p_{n+1}$ et ainsi :

La suite (p_n) est croissante.

On sait de plus que p_n est la probabilité d'un événement donc (p_n) est majorée par 1 et ainsi (*Théorème de convergence monotone*)

La suite (p_n) est convergente.

14.

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= P(Z_{n+1} = 0) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k)P(Z_{n+1} = 0 | Z_1 = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \times p_n^k \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k p_n^k}{k!} e^{-\lambda} \\
 &= S(p_n)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = S(p_n)}$$

15. S est continue sur $\mathbb{R}$, (p_n) est convergente vers un réel $\ell \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = S(p_n)$, donc la limite ℓ de (p_n) vérifie

$$S(\ell) = \ell$$

- si $\lambda \leq 1$ d'après 3. sur $[0, 1]$, $S(x) = x \iff x = 1$ donc $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } 1}$.
- si $\lambda > 1$ d'après 4. sur $[0, 1]$, $S(x) = x \iff x = x_\lambda$ ou $x = 1$
on montre par un raisonnement par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \leq x_\lambda$,
ce qui exclut que (p_n) converge vers 1 et ainsi dans ce cas on a bien :

$$\boxed{(p_n) \text{ converge vers } x_\lambda}$$

16. • si $\lambda \leq 1$: On est quasi-certain que la population s'éteigne.

- si $\lambda > 1$: Il est possible que la population ne s'éteigne pas, sa probabilité d'extinction vaut x_λ .

17. On cherche les $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ solutions de

$$\begin{cases}
 C_1(C_2 - C_3) = 0 \\
 C_2(C_3 - C_1) = 0 \\
 C_3(C_1 - C_2) = 0 \\
 C_1 + C_2 + C_3 = 1
 \end{cases}$$

- Si $C_1 = 0$ le système devient $\begin{cases} C_2 C_3 = 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 = 1 \end{cases}$ et les solutions sont alors $(0, 0, 1)$ et $(0, 1, 0)$

En raisonnant de même avec $C_2 = 0$ et $C_3 = 0$ on montre que les solutions avec au moins une valeur nulle sont :

$$(1, 0, 0), (0, 0, 1) \text{ et } (0, 1, 0)$$

- Si on suppose que $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ et $C_3 \neq 0$ le système est équivalent à

$$\begin{cases}
 C_2 - C_3 = 0 \\
 C_3 - C_1 = 0 \\
 C_1 - C_2 = 0 \\
 C_1 + C_2 + C_3 = 1
 \end{cases}
 \iff
 \begin{cases}
 C_2 = C_1 \\
 C_3 = C_1 \\
 C_1 + C_1 + C_1 = 1
 \end{cases}$$

dans ce cas le système a une unique solution $(1/3, 1/3, 1/3)$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les triplets } (C_1, C_2, C_3) \text{ recherchés sont : } (1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0) \text{ et } (1/3, 1/3, 1/3).}$$

18. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
 (M - \lambda I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\
 &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -1-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 + L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 + \lambda L_1 \rightarrow L_3 \end{array}
 \end{aligned}$$

(ce système est de rang 3 si et seulement si le système 2×2 en y et z est de rang 2)

or

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & -1-\lambda^2 \end{pmatrix} &= (1+\lambda)(1+\lambda^2) - (1-\lambda)^2 \\
 &= 3\lambda + \lambda^3 \\
 &= \lambda(\lambda^2 + 3)
 \end{aligned}$$

donc Le spectre de M est : $\{0; -i\sqrt{3}; i\sqrt{3}\}$

On remarque M est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ avec 3 valeurs propres distinctes donc M est diagonalisable et les sous espaces-propres sont tous de dimension 1.

• On remarque que l'espace propre associé à 0 est :

$$E_0(M) = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

•

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{i\sqrt{3}}(M) &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} & 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ 0 & 2e^{-i\frac{\pi}{3}} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 1 & e^{i\frac{\pi}{3}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle
 \end{aligned}$$

donc

$$E_{i\sqrt{3}}(M) = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

• (la matrice étant à coefficients réels on peut raisonner par passage au conjugué) :

$$E_{-i\sqrt{3}}(M) = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

19. La question précédente à montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres de M

$$\text{donc en posant } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{3}} & e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{3}} & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{on a } M = PDP^{-1}$$

20.

$$\begin{aligned} \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{4x-3} &= \frac{A(x-1)(4x-3) + Bx(4x-3) + Cx(x-1)}{x(x-1)(4x-3)} \\ &= \frac{A(4x^2 - 7x + 3) + B(4x^2 - 3x) + C(x^2 - x)}{x(x-1)(4x-3)} \\ &= \frac{(4A + 4B + C)x^2 + (-7A - 3B - C)x + 3A}{x(x-1)(4x-3)} \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} 4A + 4B + C = 0 \\ -7A - 3B - C = 0 \\ 3A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = 1 \\ C = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3/4, 1\}, \quad \frac{1}{x(x-1)(4x-3)} = \frac{1}{3x} + \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-3/4}$$

21. On déduit de la question précédente que :

la fonction $t \mapsto \frac{1}{3} \ln(x) + \ln(1-x) - 4 \ln(x-3/4)$ est une primitive de h sur $]0, 3/4[$,

la fonction $t \mapsto \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x(1-x)^3}{(x-3/4)^4}\right)$ est une primitive de h sur $]0, 3/4[$,

L'ensemble des primitives de h sur $]0, 3/4[$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l}]0, 3/4[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x(1-x)^3}{(x-3/4)^4}\right) + c \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} c \in \mathbb{R} \end{array} \right. \right\}$$

22. Raisonnons par l'absurde en supposant que x_1 prennent une valeur en dehors de $]0, 3/4[$,

comme x_1 est continue et que $x_1(0) \in]0, 3/4[$, on aurait alors $x_1(t) = 0$ ou $x_1(t) = 3/4$ pour un réel $t > 0$ mais alors en utilisant le résultat de la question 11. on aurait alors x_1 constante ce qui entrainerait $x_1(0) = 0$ ou $3/4$ et ça c'est impossible.

En conclusion :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad x_1(t) \in]0, 3/4[$$

23. Comme $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad x_1(t) \in]0, 3/4[$ on peut écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad x_1'(t)h(x_1(t)) = 1$$

En notant $H : t \mapsto \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x(1-x)^3}{(x-3/4)^4}\right)$ la primitive trouvée en 21. il vient : (on intègre)

$$\exists D \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad H(x_1(t)) = t + D$$

$$\exists D \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad t + D = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x_1(t)(1-x_1(t))^3}{(x_1(t)-3/4)^4}\right)$$

24. On déduit de la relation précédente : $\frac{x_1(t)(1-x_1(t))^3}{(x_1(t)-3/4)^4} = \exp(3t + 3D)$ puis

$$(x_1(t) - 3/4)^4 = x_1(t)(1-x_1(t))^3 \exp(-3t - 3D)$$

or $t \mapsto x_1(t)(1-x_1(t))^3$ est bornée (car x_1 est bornée d'après 22.) donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t) - 3/4)^4 = 0$

Finalement on a bien :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 3/4$$