

Correction du sujet : G2E (2023).

PROBLEME 1**Partie A**

1.(a) f est dérivable sur $[0, 1]$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) = -e^{x+\frac{x^2}{2}} + (1-x)(1+x)e^{x+\frac{x^2}{2}} = -x^2 e^{x+\frac{x^2}{2}}$$

on a donc : $\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) < 0$ sauf en 0 donc f est strictement décroissante sur $[0, 1]$

En résumé, f est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$

donc (*théorème de la bijection*) elle réalise une bijection de $[0, 1]$ dans $[f(1), f(0)]$

or $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ donc

f réalise une bijection strictement décroissante de $[0, 1]$ dans lui même.

(b) Le résultat précédent entraîne que : $\forall x \in [0, 1], \quad (1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}} \leq 1$ ou encore $(1-x)e^x e^{\frac{x^2}{2}} \leq 1$
et comme $e^{\frac{x^2}{2}} > 0$, on obtient bien :

$$\forall x \in [0, 1], \quad (1-x)e^x \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

On sait que $\alpha > 0$, donc $x_n = n^{-\alpha} \in [0, 1]$; et comme f est décroissante sur $[0, 1]$ cela entraîne que
 $\forall x \in [0, x_n], \quad f(x_n) \leq f(x)$ ce qui s'écrit aussi $y_n \leq (1-x)e^x e^{\frac{x^2}{2}}$
et comme $e^{\frac{x^2}{2}} > 0$, on obtient bien :

$$\forall x \in [0, x_n], \quad y_n e^{-\frac{x^2}{2}} \leq (1-x)e^x$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} x_n \sqrt{n} &= n^{-\alpha} \times n^{\frac{1}{2}} \\ &= n^{\frac{1}{2}-\alpha} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \left(\text{car } \alpha < \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sqrt{n} = +\infty$$

(c) On sait que

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

et comme (x_n) tend vers 0, on obtient : $n \ln(y_n) = n \ln(f(x_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n \frac{x_n^3}{3}$
or

$$\begin{aligned}
nx_n^3 &= n \times n^{-3\alpha} \\
&= n^{3(\alpha - \frac{1}{3})} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{car } \alpha > \frac{1}{3})
\end{aligned}$$

on en déduit que $n \ln(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; et en passant à l'exponentielle il vient :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n^n = 1}$$

- 3.(a) • 2.(a) a donné : $\forall x \in [0, x_n], \quad 0 \leq y_n e^{-\frac{x^2}{2}} \leq (1-x)e^x$ donc $y_n^n e^{-\frac{nx^2}{2}} \leq (1-x)^n e^{nx}$,
puis en intégrant sur $[0, x_n]$ on obtient :

$$y_n^n \int_0^{x_n} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \leq I_n$$

- En 1.(b) on a montré : $\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq (1-x)e^x \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$ donc $(1-x)^n e^{nx} \leq e^{-\frac{nx^2}{2}}$ puis en intégrant sur $[0, 1]$ on obtient :

$$I_n \leq \int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}} dx$$

En conclusion on a bien :

$$\boxed{y_n^n \int_0^{x_n} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}} dx}$$

- (b) Dans les deux intégrales on fait le changement de variable $t = x\sqrt{n}$ (possible car $n \geq 1$) et on obtient :

$$y_n^n \int_0^{x_n\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} dt \leq I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} dt$$

$$\boxed{y_n^n \int_0^{x_n\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \sqrt{n} I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$$

- (c) Connaissant la densité continue de la loi normale centrée réduite, on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}$$

comme $x_n\sqrt{n}$ et $\sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$, y_n^n tend vers 1, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n^n \int_0^{x_n\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et comme pour tout $n \geq 1$, $y_n^n \int_0^{x_n\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \sqrt{n} I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

on en déduit (théorème des gendarmes) :

$$\boxed{I_n \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Partie B.

- 4.(a) γ_1 est l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(1)$, donc $\boxed{\gamma_1 = 1}$
Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, γ_n existe.

- Pour $n = 1$ on a déjà vu que γ_1 existe.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que γ_n existe.

Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^{n+1} e^{-t} dt &= \left[-t^{n+1} e^{-t} \right]_0^x - \int_0^x (n+1)t^n (-e^{-t}) dt \\
&= -x^{n+1} e^{-x} + (n+1) \int_0^x t^n e^{-t} dt \\
&\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 + (n+1)\gamma_n
\end{aligned}$$

En effet :

$$x^{n+1}e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{c'est une croissance comparée}) \quad \text{et}$$

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \gamma_n \quad (\text{avec l'hypothèse de récurrence})$$

Ce qui permet d'affirmer que γ_{n+1} existe.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma_n \text{ existe.}}$$

$$\text{De plus le calcul fait dans l'hérédité donne la relation : } \boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma_{n+1} = (n+1)\gamma_n}$$

(b) On reconnaît la définition de la factorielle d'un entier naturel,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = n!}$$

5.(a)

$$\begin{aligned} \sigma_n &= e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-n}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} n^k \\ &= \frac{e^{-n}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} n^k \gamma_{n-k} \quad \text{car } \gamma_n = n! \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sigma_n = \frac{e^{-n}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k \gamma_{n-k}}$$

(b) On continue le calcul précédent :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{e^{-n}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k \gamma_{n-k} \\ &= \frac{e^{-n}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k \int_0^{+\infty} t^{n-k} e^{-t} dt \\ &= \frac{e^{-n}}{n!} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k t^{n-k} e^{-t} dt \\ &= \frac{e^{-n}}{n!} \int_0^{+\infty} (t+n)^n e^{-t} dt \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sigma_n = \frac{e^{-n}}{n!} \int_0^{+\infty} (t+n)^n e^{-t} dt}$$

(c)

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{e^{-n}}{n!} \int_0^{+\infty} (t+n)^n e^{-t} dt \\ &= \frac{e^{-n}}{n!} \int_n^{+\infty} u^n e^{-u+n} du \\ &= \frac{1}{n!} \int_n^{+\infty} u^n e^{-u} du \\ &= \frac{1}{n!} \left(n! - \int_0^n u^n e^{-u} du \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_n = 1 - \frac{1}{n!} \int_0^n u^n e^{-u} du}$$

(d)

$$\begin{aligned}\sigma_n &= 1 - \frac{1}{n!} \int_0^n u^n e^{-u} du \\ &= 1 - \frac{1}{n!} \int_1^0 (n(1-x))^n e^{-n(1-x)} (-n) dx \\ &= 1 - \frac{n^{n+1}}{n!e^n} \int_0^1 (1-x)^n e^{nx} dx\end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_n = 1 - \frac{n^{n+1}}{n!e^n} I_n}$$

6.

$$\begin{aligned}\frac{n^{n+1}}{n!e^n} I_n &\sim \frac{n^{n+1}}{\sqrt{2\pi n} n^n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \\ &\sim \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}}$$

Partie C.

7.(a) (On énonce le théorème avec les données)

Les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes, de même loi admettant une espérance 1 et une variance, donc (loi faible des grands nombres) :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|M_n - 1| > \varepsilon) = 0}$$

(b) La linéarité de l'espérance donne $E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k)$

or $E(X_k) = 1$ donc $\boxed{E(M_n) = 1}$

L'indépendance des X_n donne : $V(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k)$.

or $V(X_k) = 1$ donc $\boxed{V(M_n) = \frac{1}{n}}$

8.(a) $M_n^* = \frac{M_n - E(M_n)}{\sqrt{V(M_n)}}$ donc $\boxed{M_n^* = \sqrt{n}(M_n - 1)}$

(b) $M_n^* \leq 0 = (M_n \leq 1)$ est l'événement $\left(\sum_{k=1}^n X_k \leq n \right)$

or $\sum_{k=1}^n X_k$ suit la loi de Poisson de paramètre n donc $\mathbb{P}(M_n^* \leq 0) = \sum_{k=1}^n \frac{n^k}{k!} e^{-n}$

$$\boxed{\mathbb{P}(M_n^* \leq 0) = \sigma_n}$$

9.(a) (On énonce le théorème avec les données)

Les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes, de même loi admettant une espérance 1 et une variance, donc (théorème central limite) :

$$\boxed{M_n^* \text{ converge en loi vers une variable suivant la loi normale centrée réduite.}}$$

(b) Cette convergence en loi implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(M_n^* \leq 0) = \Phi(0)$

en notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

or $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ donc on retrouve bien :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}}$$

PROBLEME 2

Partie A

- 1.(a) On a tiré une boule noire, donc on ajoute $a = 3$ boules noires et $b = 0$ boules blanches,

A l'étape suivante l'urne contient 6 boules noires et 5 boules blanches.

- (b) $\sigma_A = 3$ est le nombre de boules ajoutées à chaque étape.

Le nombre de boules dans l'urne est donc un entier de la forme $2 + 3k$ avec k un entier naturel.
or $20 + 22 = 42$ ne peut pas s'écrire $2 + 3k$ et ainsi :

Il n'est pas possible qu'à une certaine étape, il y ait 22 boules blanches et 20 boules noires.

- 2.(a) La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{A}$ mais $\frac{1}{2}M \notin \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ n'est pas un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

- (b) La somme de deux entiers naturels est nulle si, et seulement si, les deux sont nuls. (*En effet ils sont positifs*).
donc

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\sigma_A \iff A = O_2$

- (c) Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{A}$ et k un entier naturel,

$$A + kA' = \begin{pmatrix} a + ka' & b + kb' \\ c + kc' & d + kd' \end{pmatrix} \text{ a bien des coefficients dans } \mathbb{N}$$

et d'une part $(a + ka') + (b + kb') = \sigma_A + k\sigma_{A'}$ et d'autre part $(c + kc') + (d + kd') = \sigma_A + k\sigma_{A'}$

En conclusion

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}$ et $A' \in \mathcal{A}$, $A + kA' \in \mathcal{A}$

- (d) Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{A}$,

$$AA' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \text{ a bien des coefficients dans } \mathbb{N}$$

et d'une part $aa' + bc' + ab' + bd' = a\sigma_{A'} + b\sigma_{A'} = \sigma_A\sigma_{A'}$ et d'autre part $ca' + dc' + cb' + dd' = \dots = \sigma_A\sigma_{A'}$

En conclusion

Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $A' \in \mathcal{A}$, $AA' \in \mathcal{A}$

- 3.(a) comme $A \in \mathcal{A}$, on a $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sigma_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

σ_A est une valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé

- (b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ donc $a + b = c + d$ et ainsi : $d - b = a - c$

On remarque que $A^\top \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \delta_A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc δ_A est une valeur propre de $A^\top$

et on sait que A et $A^\top$ ont même spectre donc

δ_A est une valeur propre de A

- 4.(a)

$$\begin{aligned} \sigma_A \delta_A &= \sigma_A(d - b) \\ &= \sigma_A d - \sigma_A b \\ &= (a + b)d - (c + d)b \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

$$\sigma_A \delta_A = \det(A)$$

(b)

$$\begin{aligned} AA' &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{AA' = \sigma_A \delta_A I_2}$$

(c) (*Analyse*) Soit A une matrice inversible d'inverse A^{-1} appartenant à $\mathcal{A}$.

on sait que $\det(A) \neq 0$ et $AA' = \det(A) I_2$ donc $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

1er cas : $ad - bc > 0$

les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls donc $b = 0$ et $c = 0$,

on en déduit que $A^{-1} = \frac{1}{ad} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$

et comme A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{N}$ on a nécessairement $a = d = 1$ et alors $A = I_2$.

2ième cas : $ad - bc < 0$

les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls donc $a = 0$ et $d = 0$,

on en déduit que $A^{-1} = \frac{1}{-bc} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$

et comme A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{N}$ on a nécessairement $b = c = 1$ et alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

donc si A est une matrice inversible d'inverse A^{-1} appartenant à $\mathcal{A}$ alors $A = I_2$ ou $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(*synthèse*) Réciproquement : si $A = I_2$ ou $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors il est simple de vérifier que ce sont deux matrices inversibles d'inverse appartenant à $\mathcal{A}$.

A est une matrice inversible d'inverse appartenant à $\mathcal{A}$ si, et seulement si : $A = I_2$ ou $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.(a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice d'ajout équilibrée,

On a nécessairement $\delta_A \leq \sigma_A$, donc distinguons deux cas :

• 1er cas : $\delta_A = \sigma_A$, on a alors $a + b = a - c$, ce qui entraîne $b = -c$ donc $b = c = 0$ d'où $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et A est donc bien diagonalisable.

• 2ième cas : $\delta_A < \sigma_A$, dans ce cas A est une matrice 2 qui a deux valeurs propres distinctes, elle est donc bien diagonalisable.

$\boxed{\text{Toute matrice d'ajout équilibrée est diagonalisable.}}$

Le raisonnement précédent montre que A est toujours semblable à $\begin{pmatrix} \sigma_A & 0 \\ 0 & \delta_A \end{pmatrix}$

donc (comme $\sigma_A \geq \delta_A$) A est inversible si, et seulement si, $\delta_A \neq 0$.

or $\delta_A = 0$ équivaut à $b = d$ et $a = c$, donc :

$\boxed{\text{L'ensemble des matrices de } \mathcal{A} \text{ non inversibles est } \left\{ \begin{pmatrix} a & d \\ a & d \end{pmatrix} \mid (a, d) \in \mathbb{N}^2 \right\}}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ajout non équilibrée (*immédiat*) et diagonalisable (*car diagonale*).

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ajout non équilibrée (*immédiat*) et non diagonalisable.

Justifions par l'absurde qu'elle n'est pas diagonalisable :

- Elle est triangulaire donc 1 est sa seule valeur propre,
- Si elle était diagonalisable elle serait donc semblable à I_2 ,

or seul I_2 est la seule matrice semblable à I_2 donc on aurait $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ ce qui est impossible.

Partie B.

6.(a) A chaque étape on ajoute 0 ou σ boules noires donc après n étapes le nombre de boules noires prend des valeurs dans

$$S_n(\Omega) = \{1 + k\sigma \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

- Au début il y a une boule noire dans l'urne donc $S_0 = 1$ (*variable certaine*)
- A la $n + 1$ ième étape on ajoute 0 ou σ boules noires donc $S_{n+1} - S_n$ prend pour valeurs 0 ou σ
 $(S_{n+1} - S_n = \sigma) = (X_{n+1} = 1)$ et $(S_{n+1} - S_n = 0) = (X_{n+1} = 0)$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} - S_n = \sigma X_{n+1}$$

- (b)** Si $(S = s)$ est réalisé : (*On raisonne avec la probabilité conditionnelle $P_{(S=s)}$*)
 au $n + 1$ ième tirage l'urne sous cette condition contient s boules noires sur un total de $2 + \sigma n$,
 donc (*les boules sont indiscernables au toucher*) la probabilité d'obtenir une boule noire vaut $\frac{s}{2 + \sigma n}$

$$P_{(S=s)}(X_{n+1} = 1) = \frac{s}{2 + \sigma n}$$

7.(a)

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= P(X_{n+1} = 1) \quad (\text{car } X_{n+1} \text{ est une variable de Bernoulli}) \\ &= \sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s) P_{(S=s)}(X_{n+1} = 1) \quad (\text{Formule des probabilités totales}) \\ &= \sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s) \frac{s}{2 + \sigma n} \quad (\text{avec le résultat de 6.(b)}) \end{aligned}$$

donc

$$E(X_{n+1}) = \frac{E(S_n)}{2 + \sigma n}$$

- (b)** Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(S_n) = \frac{2 + \sigma n}{2}$

- Pour $n = 0$,

$$\text{d'une part } S_0 = 1 \text{ donc } E(S_0) = 1, \quad \text{et d'autre part } \frac{2 + \sigma \times 0}{2} = 1$$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $E(S_n) = \frac{2 + \sigma n}{2}$,

$$\begin{aligned} E(S_{n+1}) &= E(S_n + \sigma X_{n+1}) \quad (\text{d'après 6.(a)}) \\ &= E(S_n) + \sigma E(X_{n+1}) \quad \text{linéarité} \\ &= E(S_n) + \sigma \frac{E(S_n)}{2 + \sigma n} \quad (\text{d'après 7.(a)}) \\ &= \frac{2 + \sigma(n+1)}{2 + \sigma n} E(S_n) \\ &= \frac{2 + \sigma(n+1)}{2 + \sigma n} \times \frac{2 + \sigma n}{2} \quad \text{En utilisant l'hypothèse de récurrence} \\ &\text{donc on a bien : } E(S_{n+1}) = \frac{2 + \sigma(n+1)}{2} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad E(S_n) = \frac{2 + \sigma n}{2}$$

- (c)** On vient de montrer que $E(S_n) = \frac{2 + \sigma n}{2}$ et $E(X_{n+1}) = \frac{E(S_n)}{2 + \sigma n}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

or les X_n suivent des lois de Bernoulli donc

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}$$