

Correction du sujet : G2E (2024).

PROBLEME 1**Partie A**

1. • A n'est pas symétrique donc $A \notin S_2^+(\mathbb{R})$
- $\det(B - \lambda I_2) = \lambda^2 - 1$ donc $\text{sp}(B) = \{-1, 1\} \not\subset \mathbb{R}_+$ donc $B \notin S_2^+(\mathbb{R})$
- C est symétrique et $\text{sp}(C) = \{0, 2\} \subset \mathbb{R}_+$ donc $C \in S_2^+(\mathbb{R})$
- D est symétrique et $\det(D - \lambda I_2) = (2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3 = \dots = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$ donc $\text{sp}(D) = \{1, 5\} \subset \mathbb{R}_+$ donc $D \in S_2^+(\mathbb{R})$

2. (a) • on remarque que : $\mathcal{M} = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

• De plus pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entraine $(a, b) = (0, 0)$

donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une famille libre.

on en déduit que cette famille est une base de \mathcal{M} et ainsi $\dim(\mathcal{M}) = 2$

(b) Pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + by \\ ay + 2b \\ a + by \end{pmatrix}$$

on veut $ay + 2b = (a + by)y$, il suffit pour cela d'avoir $y^2 = 2$:

- pour $y = -\sqrt{2}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a, b)$ associé à la valeur propre $a - \sqrt{2}b$

- pour $y = \sqrt{2}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a, b)$ associé à la valeur propre $a + \sqrt{2}b$

- le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux précédents et $M(a, b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a, b)$ associé à la valeur propre a

(c) La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est orthogonale et formée de 3 vecteurs non nuls.

C'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Et en utilisant le résultat de la question b) c'est une base de vecteurs propres de $M(a, b)$.

On en déduit que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormale formée de vecteurs

propres de $M(a, b)$ associés respectivement à a , $a + b\sqrt{2}$ et $a - b\sqrt{2}$; autrement dit :

En posant $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ on a P inversible telle que $P^{-1} = P^T$ et

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a, b) = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a + b\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} \end{pmatrix} P^T$

- (d) $M(a, b)$ est symétrique et d'après l'étude précédente ses valeurs propres sont a , $a + b\sqrt{2}$ et $a - b\sqrt{2}$
 Donc $M(a, b) \in S_3^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $a \geq 0$, $a + b\sqrt{2} \geq 0$ et $a - b\sqrt{2} \geq 0$

$$\boxed{M(a, b) \in S_3^+(\mathbb{R}) \text{ si, et seulement si, } -a \leq b\sqrt{2} \leq a}$$

Partie B

3.(a) Raisonnons par double implication :

- on suppose que $x \in E^\perp$,

on a alors $\forall y \in E$, $\langle x|y \rangle = 0$, et les $e_i \in E$ donc a fortiori, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle x|e_i \rangle = 0$

- on suppose que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle x|e_i \rangle = 0$,

un vecteur y de E peut s'écrire $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ ce qui entraîne (bilinearité) que $\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x|e_k \rangle$

or $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle x|e_i \rangle = 0$ donc pour tout $y \in E$, $\langle x|y \rangle = 0$, autrement dit $x \in E^\perp$.

En conclusion :

$$\boxed{x \in E^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x|e_i \rangle = 0}$$

(b) Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \in \text{Ker}(G) &\iff \begin{pmatrix} (e_1 | e_1) & (e_1 | e_2) & \dots & (e_1 | e_n) \\ (e_2 | e_1) & (e_2 | e_2) & \dots & (e_2 | e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_n | e_1) & (e_n | e_2) & \dots & (e_n | e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \langle e_1 | \sum_{i=1}^n x_i e_i \rangle \\ \langle e_2 | \sum_{i=1}^n x_i e_i \rangle \\ \vdots \\ \langle e_n | \sum_{i=1}^n x_i e_i \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et en utilisant 1.(a) on peut conclure :

$$\boxed{(x_1, \dots, x_n) \in \text{Ker}(G) \iff \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E^\perp}$$

(c) Remarque : La matrice G est carrée donc G est inversible si, et seulement si, $\text{ker}(G) = \{(0, \dots, 0)\}$.

Raisonnons par double inclusion :

- On suppose que (e_1, \dots, e_n) est libre :

(e_1, \dots, e_n) est donc une base de E qui est alors égal à \mathbb{R}^n et ainsi $E^\perp = \{(0, \dots, 0)\}$

$$\begin{aligned} \text{on a alors } (x_1, \dots, x_n) \in \text{Ker}(G) &\iff \sum_{i=1}^n x_i e_i = (0, \dots, 0) && \text{(d'après 1.(b))} \\ &\iff (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) && \text{(car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est libre)} \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\text{ker}(G) = \{(0, \dots, 0)\}$ et ainsi G est inversible.

- On suppose que G est inversible :

on a alors $\text{Ker}(G) = \{(0, \dots, 0)\}$,

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i e_i = (0, \dots, 0)$,

cela entraîne que $\sum_{i=1}^n x_i e_i \in E^\perp$ et donc (avec 1.(c)) $(x_1, \dots, x_n) \in \text{Ker}(G)$

or $\text{Ker}(G) = \{(0, \dots, 0)\}$, donc $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ et ainsi (e_1, \dots, e_n) est libre

En conclusion :

$$\boxed{(e_1, \dots, e_n) \text{ est libre si, et seulement si, } G \text{ est inversible.}}$$

4. (a)

$$\begin{aligned}
 X^T G X &= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} (e_1 | e_1) & (e_1 | e_2) & \dots & (e_1 | e_n) \\ (e_2 | e_1) & (e_2 | e_2) & \dots & (e_2 | e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_n | e_1) & (e_n | e_2) & \dots & (e_n | e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
 &= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} \langle e_1 | \sum_{i=1}^n x_i e_i \rangle \\ \langle e_2 | \sum_{i=1}^n x_i e_i \rangle \\ \vdots \\ \langle e_n | \sum_{i=1}^n x_i e_i \rangle \end{pmatrix} \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\rangle
 \end{aligned}$$

En posant $x' = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ on a : $\boxed{X^T G X = \langle x' | x' \rangle}$

(b) D'une part $X^T G X = \langle x' | x' \rangle$ et d'autre part $X^T G X = \lambda X^T X$ donc $\langle x' | x' \rangle = \lambda X^T X$ et comme $X \neq 0$ il vient $\lambda = \frac{\|x'\|^2}{\|x\|^2}$ et ainsi $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}^+}$

On a donc $\text{Sp}(G) \in \mathbb{R}_+$ et comme G est une matrice symétrique on peut conclure :

$$\boxed{G \in S_n^+(\mathbb{R})}$$

Partie C

5. (a)

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X_i, X_j + x X_k) &= E(X_i(X_j + x X_k)) - E(X_i)E(X_j + x X_k) \\
 &= E(X_i X_j) + x E(X_i X_k) - E(X_i)(E(X_j) + x E(X_k)) \quad (\text{linéarité de l'espérance}) \\
 &= E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) + x(E(X_i X_k) - x E(X_i)E(X_k))
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cov}(X_i, X_j + x X_k) = \text{Cov}(X_i, X_j) + x \text{Cov}(X_i, X_k)}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^n x_j X_j\right) &= E\left(X_i \sum_{j=1}^n x_j X_j\right) - E(X_i) E\left(\sum_{j=1}^n x_j X_j\right) \\
 &= E\left(\sum_{j=1}^n x_j X_i X_j\right) - E(X_i) \sum_{j=1}^n x_j E(X_j) \quad (\text{linéarité de } E(\cdot)) \\
 &= \sum_{j=1}^n x_j E(X_i X_j) - \sum_{j=1}^n x_j E(X_i) E(X_j) \quad (\text{encore la linéarité de } E(\cdot)) \\
 &= \sum_{j=1}^n x_j (E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j))
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^n x_j X_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \text{Cov}(X_i, X_j)}$$

6. (a) Pour tout (i, j) , $\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}(X_j, X_i)$ donc Σ est symétrique, de plus la covariance a pour valeurs des réels donc

$$\boxed{\Sigma \text{ est une matrice symétrique réelle}}$$

(b) on note $Y = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

D'une part $Y^T \Sigma Y = \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n x_i X_i; \sum_{i=1}^n x_i X_i \right)$ et d'autre part $Y^T \Sigma Y = \lambda Y^T Y$

$$\text{or } Y \neq 0 \text{ donc } \lambda = \frac{V \left(\sum_{i=1}^n x_i X_i \right)}{\|Y\|^2} \text{ ainsi } \boxed{\lambda \in \mathbb{R}^+}$$

On a donc $\text{Sp}(\Sigma) \in \mathbb{R}_+$ et ainsi :

$$\boxed{\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})}$$

PROBLEME 2

Partie A

1. $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $] -\infty; +\infty[$,
l'intégrale I est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$,

De plus cet intégrande est pair donc il suffit de montrer que $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente.

• Pour $x \geq 1$ on a $x^2 \geq x$ donc $e^{-x^2} \leq e^{-x}$

$$\forall x \geq 1, \quad 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

• $F : x \mapsto -e^{-x}$ est une primitive de $x \mapsto e^{-x}$ sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ donc $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge

En appliquant le théorème de convergence par comparaison il vient : $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge

En conclusion : (en utilisant la parité)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ est convergente}}$$

2.(a) On utilisera une conséquence de la stricte positivité de l'intégrale :

Pour f et g continue sur $[a, b]$ tel que $a < b$,

$$\text{si } \forall t \in]a, b[, \quad f(t) < g(t) \quad \text{alors } \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

$$\forall t \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad 0 < \cos(t) < 1 \quad \text{donc } \forall t \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad 0 < \cos^{n+1}(t) < \cos^n(t)$$

or toutes ces fonctions sont continues sur \mathbb{R} donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dt < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) dt < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad 0 < W_{n+1} < W_n}$$

(b) On fixe $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x) \times \cos(x) dx \\ &= \left[\cos^{n+1}(x) \times \sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(-\sin(x)) \cos^n(x) \times \sin(x) dx \\ &\quad x \mapsto \cos^{n+1}(x) \text{ et } x \mapsto \sin(x) \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur }]0; \frac{\pi}{2}] \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \times \sin^2(x) dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \times (1 - \cos^2(x)) dx \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$$

(c) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

• Pour $n = 1$,

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dx = \left[\sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \text{on a bien : } 1 \cdot W_1 \cdot W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} (n+1)W_{n+1}W_n &= nW_{n-1}W_n && \text{d'après 2.(b)} \\ &= \frac{\pi}{2} && \text{avec l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

on obtient bien la relation au rang $n+1$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}}$$

(d) (W_n) est décroissante (d'après 2.(a)) donc $W_n \leq W_{n-1}$ et $W_{n-1} \leq W_{n-2}$
 et (d'après 2.(b)) donc $W_{n-2} = \frac{n}{n-1}W_n$ il vient :

$$W_n \leq W_{n-1} \leq \frac{n}{n-1}W_n \quad \text{ou encore (car } W_n > 0) \quad 1 \leq \frac{W_{n-1}}{W_n} \leq \frac{n}{n-1}$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure

$$\boxed{W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{n-1}}$$

$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{n-1}$ donc $nW_nW_{n-1} \sim nW_n^2$ or (d'après 2.(c)) $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

il vient : $nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ et enfin comme $W_n \geq 0$ on peut en conclure :

$$\boxed{W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

3.(a) On note $h : x \mapsto x - \ln(x+1)$,

h est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et $h'(x) = \frac{x}{x+1}$ on en déduit le tableaux de variations de h .

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$		+	-
h	$+\infty$	\searrow	\nearrow $+\infty$

Remarque : pour la limite en $+\infty$ on remarque que $h(x) = (x+1) \left(\frac{x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Ce qui permet d'affirmer que :

$$\boxed{\text{Pour tout } x > -1; \quad \ln(1+x) \leq x}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; \sqrt{n}]$,

$-\frac{x^2}{n} > -1$ donc en utilisant 3.(a) on obtient : $\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n}$ et donc $n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -x^2$

$\frac{x^2}{n} > -1$ donc en utilisant 3.(a) on obtient : $\ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \leq \frac{x^2}{n}$ et donc $-x^2 \leq -n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)$

On en déduit en passant à l'exponentielle qui est une fonction croissante que

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

Remarque : cette relation est encore vraie pour $x = \sqrt{n}$.

En intégrant sur $[0; \sqrt{n}]$ on obtient bien :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$$

- (c) • La fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{n} \sin(t)$ est de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$,
 en faisant le changement de variable $x = \sqrt{n} \sin(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))^n \sqrt{n} \cos(t) dt \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t) dt \\ &= \sqrt{n} W_{2n+1} \end{aligned}$$

- La fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{n} \tan(t)$ est de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{4}]$,
 en faisant le changement de variable $x = \sqrt{n} \tan(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2(t))^n \sqrt{n} (1 + \tan^2(t)) dt \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2(t))^{1-n} dt \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(t) dt \quad 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \\ &\leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t) dt \quad \text{car } \cos(t) \geq 0 \text{ sur } \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \\ &\leq \sqrt{n} W_{2n-2} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

- (d) $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ donc $W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ et $W_{2n-2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$

on en déduit que $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$ est encadrée par deux suites qui tendent vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

or on a montré à la question 1) que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

L'intégrande étant pair on peut conclure :

$$I = \sqrt{\pi}$$

Partie B

4. (a) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$,

La fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} et $\varphi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ donc on bien $\boxed{\varphi'(x) = -x\varphi(x)}$

(b) $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$

5. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\max(X_1, X_2) \leq x) \\ &= P((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \quad \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= \Phi(x)^2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction de répartition de } Y \text{ est } x \mapsto \Phi(x)^2}$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= 1 - P(Z > x) \\ &= P(\min(X_1, X_2) > x) \\ &= 1 - P((X_1 > x) \cap (X_2 > x)) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \quad \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= 1 - (1 - \Phi(x))^2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction de répartition de } Z \text{ est } x \mapsto \Phi(x)(2 - \Phi(x))}$

(b) Les fonctions de répartitions de Y et Z sont de classe C^1 sur \mathbb{R} donc

$\boxed{Y \text{ et } Z \text{ admettent respectivement pour densité : } f : x \mapsto 2\varphi(x)\Phi(x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto 2\varphi(x) - 2\varphi(x)\Phi(x)}$

6. (a) $x \mapsto 2\varphi(x)\Phi(x)$ est une densité de Y donc

$$\begin{aligned} E(Y) \text{ existe} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} 2x\varphi(x)\Phi(x) dx \quad \text{est absolument convergente} \\ &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} 2x\varphi(x)\Phi(x) dx \quad \text{est convergente (car de signes constants sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } \mathbb{R}^-) \\ &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} -2\varphi'(x)\Phi(x) dx \quad \text{est convergente} \end{aligned}$$

donc

$\boxed{Y \text{ admet une espérance si, et seulement si, } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x) dx \quad \text{est convergente}}$

(b)

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi'(x)\Phi(x) dx &= [\varphi(x)\Phi(x)]_a^b - \int_a^b \varphi(x)\varphi(x) dx \\ &= \varphi(b)\Phi(b) - \varphi(a)\Phi(a) - \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

or $\lim_{a \rightarrow -\infty} \varphi(a)\Phi(a) = 0$, $\lim_{b \rightarrow +\infty} \varphi(b)\Phi(b) = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge et vaut $\sqrt{\pi}$

donc

$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x) dx \text{ converge et vaut } -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}}$

(c) Le calcul fait à la question 6.(a) montre que $E(Y) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x) dx$ donc on a bien

$$E(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

(d) Pour $\omega \in \Omega$,

Si $X_1(\omega) < X_2(\omega)$ alors $Y(\omega) = X_2(\omega)$ et $Z(\omega) = X_1(\omega)$ donc $(Y + Z)(\omega) = (X_1 + X_2)(\omega)$,

Si $X_1(\omega) \geq X_2(\omega)$ alors $Y(\omega) = X_1(\omega)$ et $Z(\omega) = X_2(\omega)$ donc $(Y + Z)(\omega) = (X_1 + X_2)(\omega)$.

Donc on a bien

$$Y + Z = X_1 + X_2$$

En utilisant la linéarité de $E(\cdot)$ il vient $E(Y) + E(Z) = 0 + 0$ car X_1 et X_2 sont centrées.

En conclusion :

$$E(Z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

7.(a)

$$\begin{aligned} \int_a^b 2x^2\varphi(x)\Phi(x) dx &= \int_a^b -2x\varphi'(x)\Phi(x) dx \\ &= \left[-2x\Phi(x)\varphi(x) \right]_a^b + 2 \int_a^b (\Phi(x) - x\varphi(x))\varphi(x) dx \\ &= -2b\varphi(b)\Phi(b) + 2a\varphi(a)\Phi(a) + 2 \int_a^b \Phi(x)\varphi(x) dx - 2 \int_a^b x\varphi^2(x) dx \\ &= -2b\varphi(b)\Phi(b) + 2a\varphi(a)\Phi(a) + \Phi^2(b) - \Phi^2(a) - 2 \int_a^b x\varphi^2(x) dx \end{aligned}$$

or $\lim_{a \rightarrow -\infty} \varphi(a)\Phi(a) + \Phi(a)^2 = 0$, $\lim_{b \rightarrow +\infty} \varphi(b)\Phi(b) + \Phi(b)^2 = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ converge et vaut 0

Moment des lois normales.

Donc Y^2 admet une espérance et

$$E(Y^2) = 1$$

(b) Y et Y^2 admettent une espérance donc Y admet une variance et $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$

$$Y \text{ admet une variance et } V(Y) = \frac{\pi - 1}{\pi}$$

8.(a) (pas besoin de faire une intégration par parties)

$g : x \mapsto 2\varphi(x) - 2\varphi(x)\Phi(x)$ est une densité de Z

or on a vu que $E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2\varphi(x)\Phi(x) dx = 1$

et on sait que $E(X_1^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x) dx = 1$

donc Z^2 admet une espérance et $E(Z^2) = 2 \times 1 - 1$ on a bien $E(Z^2) = 1$

(b) Z et Z^2 admettent une espérance donc Z admet une variance et $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$

$$Z \text{ admet une variance et } V(Z) = \frac{\pi - 1}{\pi}$$

(c) On sait que $Y + Z = X_1 + X_2$, et que X_1 et X_2 sont réduites et indépendantes donc $V(Y + Z) = 2$

or les résultats précédents donnent $V(Y) + V(Z) = 2 \frac{\pi - 1}{\pi}$ qui est différent de 2 donc :

$$Y \text{ et } Z \text{ ne sont pas indépendantes}$$