

Correction du sujet : ENS (2023).

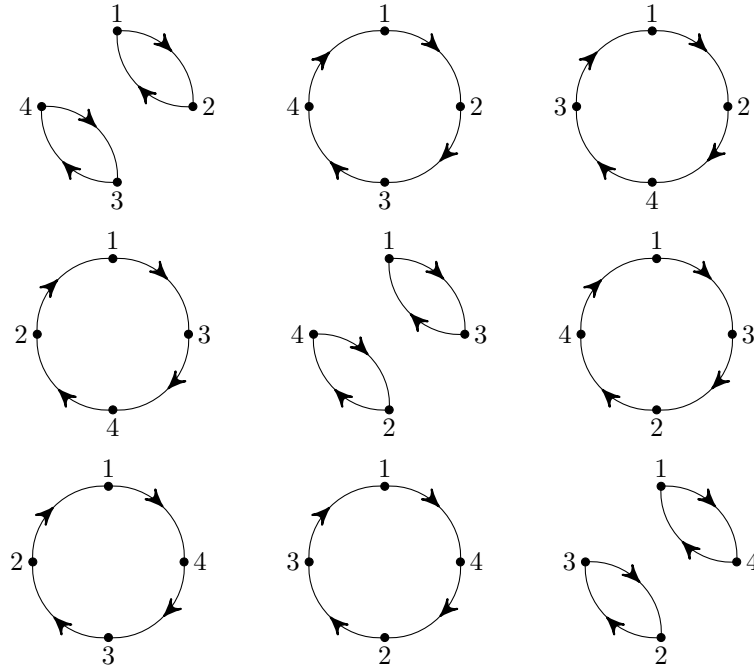
Introduction.

a. On classe tous les dérangements de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ dans l'ordre croissant du nombre formé par les 4 chiffres.

i	1	2	3	4
$\sigma_1(i)$	2	1	4	3
$\sigma_2(i)$	2	3	4	1
$\sigma_3(i)$	2	4	1	3
$\sigma_4(i)$	3	1	4	2
$\sigma_5(i)$	3	4	1	2
$\sigma_6(i)$	3	4	2	1
$\sigma_7(i)$	4	1	2	3
$\sigma_8(i)$	4	3	1	2
$\sigma_9(i)$	4	3	2	1

$$d_4 = 9$$

Remarque les 9 dérangements de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ peuvent aussi être représentés par : (*dans le même ordre*)



b. En notant X_i le résultat de l'étape i , on cherche la probabilité de l'événement :

$$\left((X_1, X_2, X_3, X_4) = (3, 4, 2, 1) \right) = (X_1 = 3) \cap (X_2 = 4) \cap (X_3 = 2)$$

La formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}\left((X_1, X_2, X_3, X_4) = (3, 4, 2, 1) \right) = \mathbb{P}(X_1 = 3) \times \mathbb{P}_{(X_1=3)}(X_2 = 4) \times \mathbb{P}_{((X_1, X_2)=(3,4))}(X_3 = 2)$$

La description de la procédure donne ces probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}\left((X_1, X_2, X_3, X_4) = (3, 4, 2, 1) \right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

En suivant cette procédure, la probabilité d'obtenir le dérangement

i	1	2	3	4
$\sigma(i)$	3	4	2	1

 est égale à $\frac{1}{12}$.

Si cette procédure était un tirage aléatoire uniforme parmi tous les dérangements de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ alors la probabilité d'obtenir chacun d'eux serait égale à $\frac{1}{d_4} = \frac{1}{9}$, or on a trouvé $\frac{1}{12}$ pour un des dérangements.

En conclusion :

Pour $n = 4$, la procédure décrite n'est pas un tirage aléatoire uniforme parmi tous les dérangements de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$.

Partie I

1.(a) f_n et P_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = f_n(x) + e^x \times \frac{x^n}{n!} e^{-x} \quad \text{et} \quad P'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = P_n(x) - \frac{x^n}{n!}$$

(Remarque pour $n = 0$: $\sum_{k=0}^{-1} \dots = 0$)

donc $(P_n + f_n)' = (P_n + f_n)$ (EDL homogène), ce qui entraîne que $(P_n + f_n)(x) = (P_n + f_n)(0) e^x$

En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P_n + f_n)(x) = e^x}$$

(b) Soit $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= e^x \left| \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right| \\ &\leq e^x \left| \int_0^x \left| \frac{t^n}{n!} e^{-t} \right| dt \right| \quad \text{En effet : } \forall (a, b) \in I^2, \quad \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |f(t)| dt \right| \\ &\leq e \max_{t \in [-1, 1]} \left(\frac{1}{n!} e^{-t} \right) \left| \int_0^x |t|^n dt \right| \quad \text{car } \max_{t \in [-1, 1]} (e^t) = e \\ &\leq \frac{e^2}{n!} \left| \int_0^x t^n dt \right| \quad \text{En effet :} \quad \underbrace{\left| \int_0^x |t|^n dt \right|}_{= \left| \int_0^x t^n dt \right|} \\ &\leq \frac{e^2}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad \text{Il suffit de vérifier pour } x < 0 \text{ et } x > 0, n \text{ pair et } n \text{ impair} \\ &\leq e^2 |x|^{n+1} \end{aligned}$$

En posant : $C = e^2$ on a :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \quad |f_n(x)| \leq C |x|^{n+1}}$$

(c) On raisonne par l'absurde et on note k_0 le plus petit indice $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $a_k \neq 0$,

• d'une part, pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{x^{k_0}} &= \frac{1}{x^{k_0}} \sum_{k=k_0}^N a_k x^k \\ &= a_{k_0} + \sum_{k=1}^{N-k_0} a_{k_0+k} x^k \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_{k_0} \neq 0 \end{aligned}$$

• d'autre part, pour $x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$,

$$|Q(x)| \leq C |x|^{n+1} \text{ entraîne que } \frac{|Q(x)|}{|x|^{k_0}} \leq C |x|^{n+1-k_0}$$

et comme $n+1-k_0 \geq 1$ on aurait alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q(x)}{x^{k_0}} = 0$ ce qui est impossible.

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = 0}$$

(d) D'après 1.(a) $P_n(x) = e^x - f_n(x)$ et $P_n(-x) = e^{-x} - f_n(-x)$ donc

$$P_n(x)P_n(-x) = 1 - e^x f_n(-x) - e^{-x} f_n(x) + f_n(x)f_n(-x)$$

En notant $Q(x) = -e^x f_n(-x) - e^{-x} f_n(x) + f_n(x)f_n(-x)$ on a un polynôme de degré $N \geq n$,

(En effet : $Q(x) = P_n(x)P_n(-x) - 1$)

On note C une constante telle que $\forall x \in [-1, 1], \quad |f_n(x)| \leq C |x|^{n+1}$

pour $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} |Q(x)| &\leq |e^x f_n(-x)| + |e^{-x} f_n(x)| + |f_n(x) f_n(-x)| \\ &\leq e C |x|^{n+1} + e C |x|^{n+1} + C^2 |x|^{2n+2} \end{aligned}$$

il existe donc un réel C' tel que : $\forall x \in [-1, 1], |Q(x)| \leq C' |x|^{n+1}$

On peut alors en déduire avec **1.(c)** qu'il existe un polynôme R_n tel que $Q(x) = x^{n+1} R_n(x)$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{il existe un polynôme } R_n \text{ tel que } P_n(x)P_n(-x) = 1 + x^{n+1}R_n(x)}$$

- 2.(a)** Le nombre total de permutations est $\text{card}(S_n) = n!$ et le nombre de dérangements est d_n ,
 $p_{0,n}$ est la probabilité qu'une permutation tirée uniformément au hasard dans S_n soit un dérangement donc

$$\boxed{p_{0,n} = \frac{d_n}{n!}}$$

- (b)** Les éléments de $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sont caractérisés par la donnée d'un dérangement de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \mathcal{I}$
 or le cardinal de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \mathcal{I}$ est égal à $n - k$

$$\boxed{\text{Le cardinal de } \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \text{ est égal à } d_{n-k}}$$

- (c)** On note $S_{k,n}$ l'ensemble des permutations avec exactement k points fixes,
 on a :

$$\text{card}(S_{k,n}) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{choix de } \mathcal{I}} \times \underbrace{\text{card}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})}_{\text{nombre de permutations avec } \mathcal{I} \text{ fixe}}$$

ce qui donne :

$$\frac{\text{card}(S_{k,n})}{n!} = \frac{1}{k!} \times \frac{d_{n-k}}{(n-k)!}$$

on obtient bien :

$$\boxed{p_{k,n} = \frac{1}{k!} p_{0,n-k}}$$

$(S_{k,n})_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements donc $\sum_{k=0}^n p_{k,n} = 1$

et $p_{0,n-k} = \frac{d_{n-k}}{(n-k)!}$ donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} = 1}$$

3.(a)

$$\begin{aligned} G_n(x) &= P_n(x)D_n(x) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \times \sum_{j=0}^n d_j \frac{x^j}{j!} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i, j \leq n}} \frac{d_j}{i!j!} \right) x^k \end{aligned}$$

- Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i, j \leq n}} \frac{d_j}{i!j!} = \sum_{i=0}^k \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} = 1$$

- Pour $k > n$,

$$0 \leq \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i, j \leq n}} \frac{d_j}{i!j!} = \sum_{i=0}^n \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} \leq \sum_{i=0}^k \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} = 1$$

$$\boxed{\text{Les coefficients de degré } k \text{ de } G_n \text{ valent } 1 \text{ si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et appartiennent à } [0, 1] \text{ pour } k > n.}$$

(b) D'une part :

$$\begin{aligned} G_n(x)P_n(-x) &= D_n(x)P_n(x)P_n(-x) \\ &= D_n(x)(1+x^{n+1}R_n(x)) \\ &= D_n(x) + x^{n+1}R_n(x)D_n(x) \end{aligned}$$

Donc le coefficient de degré n de $G_n(x)P_n(-x)$ est celui de $D_n(x)$: $\frac{d_n}{n!}$

D'autre part :

$$G_n(x)P_n(-x) = \left(\sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1}T_n(x) \right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right)$$

Donc le coefficient de degré n de $G_n(x)P_n(-x)$ est égal à $\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$

En conclusion :

$$\boxed{\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}$$

(c) $x \in]-1, 1[$,

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^k \quad \text{d'après 3.(a) avec } |a_k| \leq 1$$

$$\text{en notant } u_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k \quad \text{on a : } \left| \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^k \right| \leq u_{2n}(|x|) - u_n(|x|)$$

or $(u_n(|x|))$ converge et ainsi $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^k$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

on sait, de plus que $\left(\sum_{k=0}^n x^k \right)$ converge vers $\frac{1}{1-x}$ donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \frac{1}{1-x}}$

On remarque aussi $P_n(x)$ converge vers e^x (série exponentielle),

et sachant que $G_n(x) = P_n(x)D_n(x)$, on en déduit :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1, 1[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} D_n(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}}$$

4.(a) pour $k \geq 1$ et $n \geq 1$, d'après 2.(c) on a :

$$p_{k,n} = \frac{1}{k!} p_{0,n-k} \quad \text{et} \quad p_{k-1,n-1} = \frac{1}{(k-1)!} p_{0,n-k}$$

donc

$$\boxed{p_{k,n} = \frac{1}{k} p_{k-1,n-1}}$$

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=0}^n k P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k p_{k,n} \\ &= \sum_{k=1}^n p_{k-1,n-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Lorsque } n \geq 1, \text{ l'espérance de } X_n \text{ est égale à } 1.}$

(b) Pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
 E(X_n(X_n - 1)) &= \sum_{k=0}^n k(k-1)P(X_n = k) \\
 &= \sum_{k=2}^n k(k-1)p_{k,n} \\
 &= \sum_{k=2}^n p_{k-2,n-2} \quad (\text{en utilisant le résultat de 4.(a) (deux fois)}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

et on sait que $V(X_n) = E(X_n(X_n - 1)) + E(X_n) - E(X_n)^2$ donc

Lorsque $n \geq 2$, la variance de X_n est égale à 1.

5.(a) Les questions 2. et 3. donnent la relation : $p_{0,n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!}$, et on reconnaît une série exponentielle donc :

$(p_{0,n})$ converge vers $p_0 = e^{-1}$

(b) Pour k un entier fixé, on a $p_{k,n} = \frac{1}{k!} p_{0,n-k}$, or $(p_{0,n-k})$ converge vers e^{-1} donc

$(p_{k,n})$ converge vers $p_k = \frac{e^{-1}}{k!}$

$$\sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1}}{k!} = e^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} e^1$$

La série $\sum_{k \geq 0} p_k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$

(c) On reconnaît une loi de Poisson.

La loi de X est la loi de Poisson de paramètre 1, $E(X) = 1$ et $V(X) = 1$

Partie II

1.(a) Avant la boucle pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sigma(k) = k$ et à chaque passage dans la boucle on ne modifie que les valeurs de σ de 1 à i , donc juste avant l'échange de valeurs de la ligne 5, $\sigma(k) = k$ pour tout $k \in \llbracket i, n \rrbracket$

Au dernier tour de boucle on échange les valeurs en position j_n et n , or à ce moment en $\sigma(n) = n$, et $\varphi = \Phi(j_2, \dots, j_n)$ est la valeur de σ après la boucle donc

$\varphi(j_n) = n$

Donc j_n est l'antécédent de n par φ (on peut donc trouver j_n en connaissant φ)

(b) Au dernier tour de boucle on permute les valeurs en position j_n et n donc

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j_n, n\}$, $\tilde{\varphi}(k) = \varphi(k)$, $\tilde{\varphi}(j_n) = \varphi(n)$ et $\tilde{\varphi}(n) = n (= \varphi(j_n))$.

On peut ainsi déterminer j_{n-1} à partir de φ :

- si $j_{n-1} \neq j_n$ alors $\varphi(j_{n-1}) = \tilde{\varphi}(j_{n-1}) = n - 1$,

donc j_{n-1} est l'antécédent de $n - 1$ par φ

- si $j_{n-1} = j_n$ alors $\varphi(j_{n-1}) = \varphi(j_n) = n$,

donc j_{n-1} est l'antécédent de n par φ .

- (c) L'énoncé nous demande d'admettre que l'on peut obtenir par récurrence que si l'on connaît $\varphi = \Phi(j_2, \dots, j_n)$, alors on peut déterminer toutes les valeurs $j_2, \dots, j_n$, donc

l'application $\Phi : \llbracket 1, 2 \rrbracket \times \llbracket 1, 3 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow S_n$ est injective

On sait de plus que le cardinal de $\llbracket 1, 2 \rrbracket \times \llbracket 1, 3 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n \rrbracket$ vaut $n!$ donc est égal à celui de S_n .

l'application $\Phi : \llbracket 1, 2 \rrbracket \times \llbracket 1, 3 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow S_n$ est bijective

- (d) Soit $\varphi \in S_n$ et $(j_2, \dots, j_n)$ l'unique antécédent de φ par Φ (d'après 1.(c)).

L'événement $\Phi(J_2, \dots, J_n) = \varphi$ est égal à : $(J_2 = j_2) \cap \dots \cap (J_n = j_n)$,

or J_k suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, k \rrbracket$ et les J_k sont indépendantes donc la probabilité de l'événement

$\Phi(J_2, \dots, J_n) = \varphi$ est égale à : $\frac{1}{n!}$

donc toutes les permutations peuvent être renvoyées et avec la même probabilité.

PermAlea(n) renvoie une permutation tirée uniformément au hasard dans S_n

On peut remarquer que dans cet algorithme qu'il y a $n - 1$ appels à la fonction **Unif**.

2. On appel succès : "La fonction **PermAlea** donne un dérangement".

- (a) $(Z_n \geq k)$ est réalisé si, et seulement si, les $k - 1$ premiers appels à la fonction **PermAlea** donne un échec comme les appels sont indépendants on obtient : $\mathbb{P}(Z_n \geq k) = (1 - p_{0,n})^{k-1}$

de plus $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(Z_n = \infty) \subset (Z_n \geq k)$, donc $0 \leq P(Z_n = \infty) \leq (1 - p_{0,n})^{k-1}$

on sait aussi que $p_{0,n} \in]0, 1[$ donc on peut en déduire, par passage à la limite, que $P(Z_n = \infty) = 0$

On retrouve un schéma usuel de la loi géométrique :

Z_n est le rang du premier succès au cours d'une succession indéfinie d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Z_n suit la loi géométrique de paramètre $p_{0,n}$ et son espérance est $E(Z_n) = \frac{1}{p_{0,n}}$

- (b) A chaque appel de **PermAlea** on fait $n - 1$ appels à la fonction **Unif** donc

$$\begin{aligned} u_n &= E((n-1)Z_n) \\ &= (n-1)E(Z_n) \\ &= (n-1)\frac{1}{p_{0,n}} \\ &\sim \frac{n}{p_0} \quad \text{car} \quad n-1 \sim n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{0,n} = p_0 \neq 0 \end{aligned}$$

donc $$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{p_0}$$

- (c) On note A : "Obtenir le dérangement φ " et A_k : "Obtenir le dérangement φ exactement au $k^{\text{ième}}$ appel" de sorte que :

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

L'indépendance des appels donne :

$$P(A_k) = (1 - p_{0,n})^{k-1} \times \frac{1}{n!}$$

et les événements de cette réunion sont deux à deux incompatibles donc

$$P(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p_{0,n})^{k-1} \times \frac{1}{n!} = \frac{1}{p_{0,n}} \times \frac{1}{n!}$$

et comme $p_{0,n} = \frac{d_n}{n!}$ il vient $P(A) = \frac{1}{d_n}$ et ainsi :

PermAleaRejet(n) renvoie un dérangement tiré uniformément au hasard dans $S_{0,n}$

Partie III

- 1.(a) Le nombre de ces permutations est égal au nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a_1, \dots, a_\ell\}$ qui est un ensemble de cardinal $n - \ell$.

Il y a $(n - \ell)!$ permutations de S_n tels que $C_{a_1, \dots, a_\ell}$ soit réalisé.

$$(b) \text{ card}(L_1 = \ell) = \underbrace{\frac{(n-1)!}{(n-1-\ell+1)!}}_{\text{choix de l'arrangement } (a_2, \dots, a_\ell)} \times \underbrace{(n-\ell)!}_{\text{Choix d'une permutation avec } C_{a_1, \dots, a_\ell}}$$

Donc $P(L_1 = \ell) = \frac{(n-1)!}{n!}$ ce qui donne bien : $P(L_1 = \ell) = \frac{1}{n}$

Pour $\ell = 1$, $(L_1 = \ell)$ est l'ensemble des permutations qui laissent fixe 1 donc $\text{card}(L_1 = 1) = (n-1)!$,

on retrouve bien : $P(L_1 = \ell) = \frac{1}{n}$

Pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(L_1 = \ell) = \frac{1}{n}$

- (c) Si $C_{a_1, \dots, a_\ell}$ est réalisée alors on retrouve dans la même situation que la question 1.(b) mais sur $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a_1, \dots, a_\ell\}$ qui est un ensemble de cardinal $n - \ell$ et en prenant $a_{\ell+1}$ au lieu de a_1 , on peut donc en déduire que :

Pour tout $\tilde{\ell} \in \llbracket 1, n - \ell \rrbracket$, $P_{C_{a_1, \dots, a_\ell}}(L_2 = \tilde{\ell}) = \frac{1}{n - \ell}$

- 2.(a) Soit $k \geq 1$,

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $[k, k+1]$ donc $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

on en déduit : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

En sommant pour k allant de 1 à n , puis pour k allant de 2 à n il vient :

(Relation de Chasles et somme télescopique).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$

- (b) $(H_n = 1) = (Y_n = [n])$ est l'événement : "le premier appel à **Unif** donne n " qui a pour probabilité $\frac{1}{n}$.

$P(H_n = 1) = \frac{1}{n}$

Pour $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} (H_n = k) &= \bigcup_{\substack{1 \leq \ell_1, \dots, \ell_k \leq n \\ \ell_1 + \dots + \ell_k = n}} (Y_n = (\ell_1, \dots, \ell_k)) \\ &= \bigcup_{\substack{1 \leq \ell_1, \dots, \ell_k \leq n \\ \ell_1 + \dots + \ell_k = n}} (U_n = \ell_1) \cap (Y_{n-\ell_1} = (\ell_2, \dots, \ell_k)) \end{aligned}$$

Les événements de cette union sont deux à deux disjoints donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_n = k) &= \sum_{\substack{1 \leq \ell_1, \dots, \ell_k \leq n \\ \ell_1 + \dots + \ell_k = n}} \mathbb{P}\left((U_n = \ell_1) \cap (Y_{n-\ell_1} = (\ell_2, \dots, \ell_k))\right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq \ell_1, \dots, \ell_k \leq n \\ \ell_1 + \dots + \ell_k = n}} \mathbb{P}(U_n = \ell_1) \times \mathbb{P}(Y_{n-\ell_1} = (\ell_2, \dots, \ell_k)) \quad \text{Indépendance de } U_n \text{ et } Y_k \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_n = k) &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leq \ell_1, \dots, \ell_k \leq n \\ \ell_1 + \dots + \ell_k = n}} \mathbb{P}(Y_{n-\ell_1} = (\ell_2, \dots, \ell_k)) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\ell_1=1}^{n-1} \left(\sum_{\substack{1 \leq \ell_2, \dots, \ell_k \leq n-\ell_1 \\ \ell_2 + \dots + \ell_k = n-\ell_1}} \mathbb{P}(Y_{n-\ell_1} = (\ell_2, \dots, \ell_k)) \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\ell_1=1}^{n-1} \mathbb{P}(H_{n-\ell_1} = k-1)
\end{aligned}$$

Pour tout $k \geq 2$, $\mathbb{P}(H_n = k) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(H_{n-\ell} = k-1)}{n}$

(c)

$$\begin{aligned}
E(H_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(H_n = k) \\
&= \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{+\infty} k \mathbb{P}(H_n = k) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{+\infty} k \mathbb{P}(H_{n-\ell} = k-1) \quad (d'après 2.(b)) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) \mathbb{P}(H_{n-\ell} = k) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} E(H_{n-\ell} + 1) \quad (théorème de transfert)
\end{aligned}$$

donc

$$E(H_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} E(H_{n-\ell})$$

$$\begin{aligned}
E(H_{n+1}) &= 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=1}^n E(H_{n+1-\ell}) \\
&= 1 + \frac{1}{n+1} \left(E(H_n) + \sum_{\ell=1}^{n-1} E(H_{n-\ell}) \right) \\
&= 1 + \frac{1}{n+1} (E(H_n) + n(E(H_n) - 1)) \\
&= E(H_n) + \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$E(H_{n+1}) - E(H_n) = \frac{1}{n+1}$$

Or $E(H_1) = 1$ donc : $E(H_n) = h_n$ avec h_n défini à la question 2.(a).

de plus on a montré que : $\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$ ce qui entraîne que $h_n \sim \ln(n)$ et ainsi :

$$E(H_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

3.(a) Il faut surement lire : " H_n est la taille de la liste renvoyée par la fonction `LongueursCyclesAlea(n)` à la ligne 2 de l'algorithme 5 quand on effectue l'appel de la fonction `LongueursCyclesAleaRejet(n)`".

Il semble y avoir une erreur d'énoncé, il faut inverser F_n et F_n^c

On note A : "A la ligne 2 on obtient une liste de longueur t sans 1"

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n = t) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}((T_n = t) \cap \overline{A}) \\
&= \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) + \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap (T_n = t)) \\
&= \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) + \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n \cap (T_n = t)) \\
&= \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) + \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n) \mathbb{P}_{(H_n=s) \cap F_n}(T_n = t) \\
&= \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) + \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n) \mathbb{P}(T_n = t - s)
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(T_n = t) = \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) + \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n) \mathbb{P}(T_n = t - s)$$

(b) On admet l'existence de toutes les séries ci-dessous.

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{t=1}^{+\infty} t \mathbb{P}(T_n = t) \\
&= \sum_{t=1}^{+\infty} t \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) + \sum_{t=1}^{+\infty} t \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n) \mathbb{P}(T_n = t - s) \\
&= \sum_{t=1}^{+\infty} t \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) + \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{t=s+1}^{+\infty} t \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n) \mathbb{P}(T_n = t - s) \\
&= \sum_{t=1}^{+\infty} t \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) + \sum_{s=1}^{+\infty} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n) \sum_{t=1}^{+\infty} (t + s) \mathbb{P}(T_n = t) \\
&= \sum_{t=1}^{+\infty} t \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) + \sum_{s=1}^{+\infty} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n) (E(T_n) + s) \\
&= \sum_{t=1}^{+\infty} t \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) + \sum_{s=1}^{+\infty} s \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n) + \mathbb{P}(F_n) E(T_n) \\
&= E(H_n) + \mathbb{P}(F_n) E(T_n)
\end{aligned}$$

donc $E(T_n) = \frac{E(H_n)}{1 - \mathbb{P}(F_n)}$

or $1 - \mathbb{P}(F_n) = P(F_n^c) = p_{0,n}$ (la probabilité que la liste ne contienne pas de 1)

donc

$$E(T_n) = \frac{h_n}{p_{0,n}} \text{ (erreur d'énoncé ?)}$$

Remarque : Voir en annexe de cette correction un programme permettant de conforter cette conclusion par des séries de simulations.

(c) Question non traitée, nous ne faisons que $v_n \sim n$.

Lorsqu'on appelle `PermAleaCycles(LongueursCycleAleaRejet(n))`, on appelle T_n fois la fonction `Unif()` en exécutant `LongueursCycleAleaRejet(n)` puis on appelle $n - 1$ fois la fonction `Unif()` en exécutant `PermAleaCycles(n)`

Le nombre d'appels moyen est donc $v_n = E(T_n) + n - 1 = \frac{h_n}{p_0, n} + n - 1$,

On sait de plus que $h_n \sim \ln(n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_0, n = p_0 > 0$

On a bien :

$$\boxed{v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n}$$

Partie IV

1. Dans la première méthode le nombre moyen d'appels à `Unif` est $u_n \sim \frac{n}{p_0}$ (d'après II 2.(b))

Dans la deuxième méthode le nombre moyen d'appels à `Unif` est $v_n \sim n$ (d'après III 3.(c))

$p_0 < 1$ donc

En moyenne, l'algorithme de III fait asymptotiquement moins d'appels à la fonction `Unif` que celui du II

2. La fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour tout $k \geq 2$, $\ln(k) \geq \int_{k-1}^k \ln(x) dx$

en sommant on obtient : $\sum_{k=2}^n \ln(k) \geq \int_1^n \ln(x) dx$ et comme $\ln(1) = 0$ on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=2}^n \ln(k) \geq \int_1^n \ln(x) dx}$$

or $\int_1^n \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^n$ ce qui donne :

$$\boxed{\sum_{k=2}^n \ln(k) \geq n \ln(n) - n + 1}$$

3.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n^{(1-\varepsilon)n}}{n!}\right) &= n(1-\varepsilon)\ln(n) - \ln(n!) \\ &= n(1-\varepsilon)\ln(n) - \sum_{k=2}^n \ln(k) \\ &\leq n(1-\varepsilon)\ln(n) - n\ln(n) + n - 1 \quad (\text{d'après IV 2.}) \\ &\leq -\varepsilon n \ln(n) \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \ln(n)} + \frac{1}{\varepsilon n \ln(n)}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \end{aligned}$$

donc (en passant à l'exponentielle) il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{(1-\varepsilon)n}}{n!} = 0$

or $d_n = p_0, n \cdot n!$ donc $d_n \sim p_0 n!$ et ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{(1-\varepsilon)n}}{d_n} = 0$ et :

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand } n^{(1-\varepsilon)n} < d_n}$$

Il manque la conclusion.

```

from math import factorial
import random as rd

COMPTE = 0

def Unif(n):
    global COMPTE
    COMPTE += 1
    return rd.randint(1, n)

def PermAlea(n):
    L= [k for k in range(1, n+1)]
    for i in range(1,n):
        j = Unif(i-1)
        L[i], L[j] = L[j], L[i]
    return L

def LongueursCycleAlea(n):
    l = Unif(n)
    if l == n:
        return [n]
    return [l] + LongueursCycleAlea(n-l)

def LongueursCycleAleaRejet(n):
    L = LongueursCycleAlea(n)
    while 1 in L:
        L = LongueursCycleAlea(n)
    return L

def calcul_p_0(n):
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S += (-1)**k/factorial(k)
    return S

def calcul_h(n):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        S += 1/k
    return S

def PermAleaCycles(L):
    n = sum(L)
    k = len(L)
    m = 0
    a = PermAlea(n)
    S = [0 for k in range(n)]
    for j in range(1, k+1):
        for i in range(m+1, m+L[j-1]):
            S[a[i-1]-1] = a[i]
            S[a[m+L[j-1]-1]-1] = a[m]
            m = m + L[j-1]
    return S

# Etude de la question III 3.
n= 10
N = 10000 # Nombre de simulations.
for k in range(N):
    LongueursCycleAleaRejet(n)
print("Nombre moyen d'appels de Unif() par des simulations : ", COMPTE/N)
print("Calcul de l'expression hn/p_0,n : ", calcul_h(n)/(calcul_p_0(n)))
print("Cela semble confirmer l'erreur d'énoncé")

```