Correction du sujet de l'ENS (2024).

Première partie.

1) **a)** *On peut commencer par remarquer que u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$.*

En effet : u est solution d'une équation de la forme $y' = a(t)y$ donc $\exists k \in \mathbb{R} : u : t \longmapsto ke^{\left(\int_0^t a(s)ds\right)}$ et on sait que $u(0) > 0$ ce qui entraîne $k > 0$ et ainsi $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+,\, u(t) > 0}$

u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ donc $p = \dfrac{1}{u}$ l'est aussi et $p' = -\dfrac{u'}{u^2}$

on a $u' = u(r_1 - u)$ donc $-\dfrac{u'}{u^2} = -\dfrac{1}{u}(r_1 - u)$ ou encore $\boxed{p' = -r_1\, p + 1}$

On reconnait une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont les solutions sont les fonctions $t \longmapsto ke^{-r_1 t} + \dfrac{1}{r_1}$, sachant de plus que $p(0) = \dfrac{1}{u(0)}$, il vient :

$$\boxed{p(t) = \left(\frac{1}{u(0)} - \frac{1}{r_1}\right) e^{-r_1 t} + \frac{1}{r_1}}$$

b) la relation précédente et $u = \dfrac{1}{p}$ donne : $u(t) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{u(0)} - \dfrac{1}{r_1}\right) e^{-r_1 t} + \dfrac{1}{r_1}}$ ou encore :

$$\boxed{u(t) = \frac{u(0) r_1}{r_1 e^{-r_1 t} + u(0)\left(1 - e^{-r_1 t}\right)}.}$$

c) $r_1 > 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-r_1 t} = 0$ et ainsi : $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = r_1}$

2) **a)** $U(t) = e^{\int_0^t \rho(s)ds} u(t)$ donc U est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
U'(t) &= \rho(t) e^{\int_0^t \rho(s)ds} u(t) + e^{\int_0^t \rho(s)ds} u'(t) \\
&= u(t)(u(t) + v(t)) e^{\int_0^t \rho(s)ds} + u(t)(r_1 - u(t) - v(t)) e^{\int_0^t \rho(s)ds} \\
&= r_1 u(t)\, e^{\int_0^t \rho(s)ds}
\end{aligned}$$

On a donc pour tout $t \geqslant 0$, $U'(t) = r_1\, U(t)$

(on reconnait une équation différentielle linéaire à coefficients constants)

En remarquant de plus que $U(0) = u(0)$ on obtient bien : $\boxed{U(t) = u(0)e^{r_1 t}}$

Le problème est totalement symétrique $U \leftrightarrow V$, $r_1 \leftrightarrow r_2$ donc on a aussi : $\boxed{V(t) = v(0)e^{r_2 t}}$

b) *On a déjà utilisé cette propriété.*

ρ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $\dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\int_0^t \rho(s)ds\right) = \rho(t)$, de plus pour u dérivable $(e^u)' = u'e^u$ donc

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(e^{\int_0^t \rho(s)ds}\right) = \rho(t) e^{\int_0^t \rho(s)ds}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{\int_0^t \rho(s)ds}\right) &= \rho(t) e^{\int_0^t \rho(s)ds} \\
&= (u(t) + v(t)) e^{\int_0^t \rho(s)ds} \\
&= U(t) + V(t) \\
&= u(0)e^{r_1 t} + v(0)e^{r_2 t}
\end{aligned}$$

il existe un $k \in \mathbb{R}$ tel que : $e^{\int_0^t \rho(s)ds} = \dfrac{u(0)}{r_1} e^{r_1 t} + \dfrac{v(0)}{r_2} e^{r_2 t} + k.$

En utilisant la condition initiale à $t = 0$ on obtient :

$$\boxed{e^{\int_0^t \rho(s)ds} = 1 + \frac{e^{r_1 t} - 1}{r_1} u(0) + \frac{e^{r_2 t} - 1}{r_2} v(0)}$$

c)

$$\begin{aligned} u(t) &= U(t)\, e^{-\int_0^t \rho(s)ds} \\ &= u_0 e^{r_1 t} \times \frac{1}{1 + \frac{e^{r_1 t}-1}{r_1} u(0) + \frac{e^{r_2 t}-1}{r_2} v(0)} \end{aligned}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{r_1 r_2 u_0 e^{r_1 t}}{r_1 r_2 + r_2(e^{r_1 t} - 1)u(0) + r_1(e^{r_2 t} - 1)v(0)}}$$

On vérifie bien que ce résultat est cohérent avec la question 1.b).

de même on montre

$$\boxed{v(t) = \frac{r_1 r_2 v_0 e^{r_2 t}}{r_1 r_2 + r_2(e^{r_1 t} - 1)v(0) + r_1(e^{r_2 t} - 1)u(0)}}$$

d) $u(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{r_1 r_2 u(0) e^{r_1 t}}{u(0) r_2 e^{r_1 t}}$ donc $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = r_1}$

$v(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{r_1 r_2 v(0) e^{r_2 t}}{u(0) r_2 e^{r_1 t}}$ donc $v(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{r_1 v(0) e^{(r_2 - r_1)t}}{u(0)}$ ce qui donne $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0}$

Deuxième partie.

3) **a)** A est symétrique réelle donc elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Le théorème spectral *(déjà utilisé en 3) a))* montre qu'on peut choisir P orthogonale.

Autrement dit : A est symétrique réelle donc elle diagonalisable dans une base orthonormale et dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

c)

$$\begin{aligned} X^T A X &= X^T P^T D P X \\ &= Y^T D Y \\ &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 \\ &\leqslant \lambda_1 (y_1^2 + y_2^2) \\ &\leqslant \lambda_1 Y^T Y \\ &\leqslant \lambda_1 X^T P^T P X \\ &\leqslant \lambda_1 X^T X \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{X^T A X \leqslant \lambda_1 X^T X}$$

4) on a : $A\hat{X} = \lambda_1 \hat{X}$ donc $\begin{pmatrix} r_1 - d & d \\ d & r_2 - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \hat{u} \\ \lambda_1 \hat{v} \end{pmatrix}$

en sommant les deux lignes il vient : $r_1 \hat{u} + r_2 \hat{v} = \lambda_1 (\hat{u} + \hat{v})$

de plus $r_1 \neq r_2$ et $(\hat{u}, \hat{v}) \neq (0,0)$ donc $\hat{u} + \hat{v} \neq 0$ et ainsi :

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{r_1 \hat{u} + r_2 \hat{v}}{\hat{u} + \hat{v}}}$$

5) **a)** $\mathcal{F}$ est polynomiale par rapport à x et y donc elle admet des dérivées partielles par rapport à x et y et

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(x,y) = 2(x - \hat{u}) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}(x,y) = 2(y - \hat{v})$$

donc (x, y) est un point critique de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $x - \hat{u} = 0$ et $y - \hat{v} = 0$

$$\boxed{(\hat{u}, \hat{v}) \text{ est l'unique point critique de } \mathcal{F}}$$

b) U et V sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ donc $\mathcal{F}$ aussi et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(t) &= 2\,U'(t)\,(U(t)-\hat{u}) + 2\,V'(t)\,(V(t)-\hat{v}) \\
&= 2 < X'(t) \mid X(t)-\hat{X} > \\
&= 2 < (A-\lambda_1 I_2)X(t) \mid X(t)-\hat{X} > \\
&= 2 < (A-\lambda_1 I_2)X(t) \mid X(t) > \; - 2 < (A-\lambda_1 I_2)X(t) \mid \hat{X} > \\
&= 2X(t)^T(A-\lambda_1 I_2)X(t) \quad - \quad 2\hat{X}^T(A-\lambda_1 I_2)X(t)
\end{aligned}$$

or $\hat{X}^T(A-\lambda_1 I_2) = \left((A-\lambda_1 I_2)\hat{X}\right)^T$ car A est symétrique et comme $(A-\lambda_1 I_2)\hat{X} = 0$ on a bien :

$$\boxed{\mathcal{F}'(t) = 2\,X(t)^T(A-\lambda_1 I_2)X(t)}$$

On en déduit que pour tout $t \geqslant 0$, $\quad \mathcal{F}'(t) = 2\Big(X(t)^T A X(t) - \lambda_1 X(t)^T X(t)\Big)$

ce qui entraîne en utilisant 3)c) que pour tout $t \geqslant 0$, $\quad \mathcal{F}'(t) \leqslant 0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } \mathcal{F} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^+}$$

6) **a)** *(non fait)*

b) *(non fait)*

7) **a)** Le système (4) : $\left\{\begin{array}{l} u'(t) = u(t)\,(r_1 - u(t) - v(t)) + dv(t) - du(t), \\ v'(t) = v(t)\,(r_2 - u(t) - v(t)) + du(t) - dv(t), \end{array}\right.$ donne en sommant membre à membre :

$$u'(t) + v'(t) = r_1 u(t) + r_2 v(t) - u(t)(u(t)+v(t)) - v(t)(u(t)+v(t))$$

or $\quad \rho(t) = u(t) + v(t) \quad$ donc $\quad \rho'(t) = \rho(t)\left(\dfrac{r_1 u(t) + r_2 v(t)}{u(t)+v(t)} - (u(t)+v(t))\right)$

$$\boxed{\text{Pour tout } t \geqslant 0,\ \rho'(t) = \rho(t)\,(R(t) - \rho(t)) \qquad \text{où} \quad R(t) = \frac{r_1 u(t) + r_2 v(t)}{u(t)+v(t)}}$$

b) A la question 6)b) on a montré que $\lim\limits_{t\to+\infty} R(t) = \lambda_1$ donc

$$\boxed{\text{il existe } t_0 > 0 \text{ tel que pour tout } t \geqslant t_0,\ R(t) \geqslant \lambda_1 - \frac{\varepsilon}{2}}$$

Supposons que pour tout $t \geqslant t_0$, $\rho(t) \leqslant \lambda_1 - \varepsilon$.

On sait que $\rho'(t) = \rho(t)\,(R(t) - \rho(t))$ ce qui entraine : $\rho(t)' \geqslant \rho(t)\left(\lambda_1 - \dfrac{\varepsilon}{2} - \lambda_1 + \varepsilon\right)$

$$\text{pour tout } t \geqslant t_0, \quad \rho(t)' \geqslant \rho(t)\frac{\varepsilon}{2}$$

On a aussi supposé que ρ est strictement positif donc il vient $\quad$ pour tout $t \geqslant t_0$, $\quad \dfrac{\rho(t)'}{\rho(t)} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

En intégrant sur $[t_0, t]$ on obtient $\ln\left(\dfrac{\rho(t)}{\rho(t_0)}\right) \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}(t - t_0)$ en passant à l'exponentielle on obtient :

$$\boxed{\text{pour tout } t \geqslant t_0, \quad \rho(t) \geqslant \rho\,(t_0)\,e^{\varepsilon\,(t-t_0)\,/2}}$$

Cette dernière inégalité permet de montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(t) = +\infty$, mais c'est impossible car on a supposé que ρ est une fonction bornée.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } t_1 \geqslant t_0 \text{ tel que } \rho(t_1) > \lambda_1 - \varepsilon}$$

c) Supposons qu'il existe $t_2 > t_1$ tel que $\rho\,(t_2) \leqslant \lambda_1 - \varepsilon$

L'ensemble $E = \{t \geqslant t_1, \rho(t) \leqslant \lambda_1 - \varepsilon\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée donc elle possède une borne inférieure que nous noterons t_3

Montrons que $t_3 \in E$,

soit (u_n) une suite de réels de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = t_3$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant t_1$ et $\rho(u_n) \leqslant \lambda_1 - \varepsilon$ et comme ρ est continue on en déduit que :

$$t_3 \geqslant t_1 \quad \text{et} \quad \rho(t_3) \leqslant \lambda_1 - \varepsilon$$

$$\boxed{t_3 = \min\{t \geqslant t_1, \rho(t) \leqslant \lambda_1 - \varepsilon\} \text{ est bien définie}}$$

Si on avait $\rho(t_3) < \lambda_1 - \varepsilon$, sachant que $\rho(t_1) > \lambda_1 - \varepsilon$ et que ρ est continue, on aurait *(en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires)* une valeur de $t \in]t_1, t_3[$ pour laquelle $\rho(t) = \lambda_1 - \varepsilon$, mais c'est impossible car on aurait un élément de E strictement inférieur à t_3.

$$\boxed{\rho(t_3) = \lambda_1 - \varepsilon}$$

On sait que $\rho'(t_3) = \rho(t_3)(R(t_3) - \rho(t_3))$ ce qui donne : $\rho'(t_3) = (\lambda_1 - \varepsilon)(R(t_3) - \lambda_1 + \varepsilon)$
or $t_3 \geqslant t_1$ donc $R(t_3) \geqslant \lambda_1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ ce qui entraine :

$$\boxed{\rho'(t_3) \geqslant (\lambda_1 - \varepsilon)\frac{\varepsilon}{2}}$$

On peut en déduire que $\rho'(t_3) > 0$ ce qui est impossible car pour tout $t \in]t_1, t_3[,\ \rho(t) > \rho(t_3)$.
(signe du taux d'accroissement)

On peut en conclure que :

$$\boxed{\text{pour tout } t \geqslant t_1,\ \ \rho(t) \geqslant \lambda_1 - \varepsilon}$$

L'énoncé demande $t \geqslant t_0$

d) *on reprend les noms t_0, t_1, t_2, t_3.*
$\lim\limits_{t \to +\infty} R(t) = \lambda_1$ donc $\boxed{\text{il existe } t_0 > 0 \text{ tel que pour tout } t \geqslant t_0,\ R(t) \leqslant \lambda_1 + \dfrac{\varepsilon}{2}}$

Supposons que pour tout $t \geqslant t_0$, $\rho(t) \geqslant \lambda_1 + \varepsilon$.

$$\text{on a alors pour tout } t \geqslant t_0, \quad \rho'(t) \leqslant -\rho(t)\frac{\varepsilon}{2}$$

on obtient : pour tout $t \geqslant t_0$, $\quad \rho(t) \leqslant \rho(t_0)\, e^{-\varepsilon\,(t - t_0)\,/2}$
Cette dernière inégalité permet de montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(t) = 0$,
mais c'est impossible car on a pour tout $t \geqslant t_0$, $\rho(t) \geqslant \lambda_1 + \varepsilon > 0$.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } t_1 \geqslant t_0 \text{ tel que } \rho(t_1) < \lambda_1 + \varepsilon}$$

Supposons qu'il existe $t_2 > t_1$ tel que $\rho(t_2) \geqslant \lambda_1 + \varepsilon$
on montre alors que

$$\boxed{t_3 = \min\{t \geqslant t_1, \rho(t) \geqslant \lambda_1 + \varepsilon\} \text{ est bien définie et } \rho(t_3) = \lambda_1 + \varepsilon}$$

On peut en déduire que $\rho'(t_3) < 0$ ce qui est impossible et ainsi pour tout $t \geqslant t_1$, $\ \rho(t) \geqslant \lambda_1 - \varepsilon$
En conclusion :

$$\boxed{\text{il existe un } t_4 > 0 \text{ tel que pour tout } t \geqslant t_4,\ \rho(t) \leqslant \lambda_1 + \varepsilon}$$

On déduit des questions 7)d) 7)e) que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_5 > 0 : \forall t \geqslant t_5,\ \lambda_1 - \varepsilon \leqslant \rho(t) \leqslant \lambda_1 + \varepsilon$$

donc

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} \rho(t) = \lambda_1}$$

e) *(non fait)*

Troisième partie.

8) La fonction $x \longmapsto Q(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} Q(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ Q(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$
donc *(en appliquant de le théorème des valeurs intermédiaires)*

$$\boxed{\text{il existe au moins un } z \in \mathbb{R} \text{ tel que : } Q(z) = 0}$$

9) Distinguons différents cas :

❶ si $z_1 > z_2 > z_3$,
en appliquant le théorème de Rolle à $x \mapsto Q(x)$ sur les deux intervalles $[z_3, z_2]$ et $[z_2, z_1]$ on montre que :

$$Q' \text{ admet deux racines réelles } y_1 \text{ et } y_2 \text{ vérifiant : } z_1 > y_1 > z_2 > y_2 > z_3$$

❷ si $z_1 = z_2 > z_3$,

- z_1 est une racine double donc $Q'(z_1) = 0$ on note $y_1 = z_1$
- en appliquant le théorème de Rolle à $x \mapsto Q(x)$ sur l' intervalle $[z_3, z_2]$ on montre que :
  Q' admet une racine réelles $y_2 \in]z_3, z_2[$

$$Q' \text{ admet deux racines réelles } y_1 \text{ et } y_2 \text{ vérifiant : } z_1 = y_1 = z_2 > y_2 > z_3$$

❸ si $z_1 > z_2 = z_3$, on se retrouve dans un cas similaire à ❷

$$Q' \text{ admet deux racines réelles } y_1 \text{ et } y_2 \text{ vérifiant : } z_1 > y_1 > z_2 = y_2 = z_3$$

❹ si $z_1 = z_2 = z_3$,
dans ce cas z_1 est une racine triple Q donc z_1 est une racine double de Q'

En conclusion :

$$\boxed{Q' \text{ admet deux racines réelles } y_1 \text{ et } y_2 \text{ vérifiant : } z_1 \geqslant y_1 \geqslant z_2 \geqslant y_2` \geqslant z_3}$$

10) $Q'(X) = 3X^2 + 2a_2X + a_1$ et son discriminant est $\Delta = 4a_2^2 - 12a_1$
On a vu Q' admet deux racines réelles *(deux distinctes ou une double)* donc $\Delta \geqslant 0$ ce qui entraîne :

$$\boxed{{a_2}^2 \geqslant 3a_1}$$

11) $Q(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$ donc

$$Q(X) = X^3 - (z_1 + z_2 + z_3)X^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)X - z_1z_2z_3$$

donc $\qquad a_2 = -(z_1 + z_2 + z_3) \qquad a_1 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 \qquad a_0 = -z_1z_2z_3$

On a supposé ici que z_1, z_2 et z_3 sont strictement négatifs donc :

$$\boxed{a_2 > 0 \qquad a_1 > 0 \qquad a_0 > 0}$$

12) *(Ici il y a une erreur d'énoncé :)* on suppose que a_2, a_1 et a_0 sont strictement positifs.

pour tout $z \in \mathbb{R}^+$, $Q(z) = \underbrace{z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0}_{\text{somme de réels } > 0} > 0$ donc Q n'a pas de racine dans $\mathbb{R}^+$ et ainsi

$$\boxed{\text{Les racines de } Q \text{ sont toutes strictement négatives.}}$$

13) A est symétrique réelle donc $\boxed{\text{elle est diagonalisable dans } \mathbb{R}}$.

14)

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\iff X'(t) = P^{-1}DPX(t) \\ &\iff PX'(t) = DPX(t) \\ &\iff Y'(t) = DY(t) \\ &\iff \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ y_3'(t) = \lambda_3 y_3(t) \end{cases} \end{aligned}$$

on se retrouve avec trois équations linéaires à coefficients constants dont les solutions donnent :

$$\boxed{\text{pour tout } t \geqslant 0, \quad y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0)\ ,\ \ y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0) \ \text{ et } \ y_3(t) = e^{\lambda_3 t} y_3(0)}$$

15) Les λ_i sont < 0 donc $\lim\limits_{t\to+\infty} y_1(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y_2(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y_3(t) = 0$,

$$\text{or pour tout } t > 0, \qquad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} v(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} w(t) = 0}$$

16)

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - (r_1 - d)I_3) &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ d & r_2 - r_1 & d \\ 0 & d & r_3 - r_1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} d & r_2 - r_1 & d \\ 0 & d & r_3 - r_1 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} d & d & r_2 - r_1 \\ 0 & r_3 - r_1 & d \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

donc $r_1 - d$ n'est pas une valeur propre de A, on fait de même pour $r_3 - d$

$$\boxed{\lambda \text{ ne peut être égal ni à } r_1 - d, \text{ ni à } r_3 - d.}$$

On sait que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (r_1 - d)\,\hat{u} \;+\; d\hat{v} & = \lambda\hat{u} \\ d\hat{u} + (r_2 - 2d)\,\hat{v} \;+\; d\hat{w} & = \lambda\hat{v} \\ d\hat{v} \;+\; (r_3 - d)\,\hat{w} & = \lambda\hat{w}. \end{array} \right.$$

- si $\hat{u} = 0$ on obtient le système : $\left\{ \begin{array}{ll} d\hat{v} & = 0 \\ (r_2 - 2d)\,\hat{v} \;+\; d\hat{w} & = \lambda\hat{v} \\ d\hat{v} \;+\; (r_3 - d)\,\hat{w} & = \lambda\hat{w}. \end{array} \right.$ qui entraîne $\underbrace{\hat{X} = 0}_{\text{impossible}}$.
- si $\hat{v} = 0$ on obtient le système : $\left\{ \begin{array}{ll} (r_1 - d)\,\hat{u} & = \lambda\hat{u} \\ d\hat{u} \;+\; d\hat{w} & = 0 \\ (r_3 - d)\,\hat{w} & = \lambda\hat{w} \end{array} \right.$ qui entraîne $\underbrace{\hat{X} = 0}_{\text{impossible}}$ *(car $\lambda \neq r_3 - d$).*
- si $\hat{w} = 0$ on obtient le système : $\left\{ \begin{array}{ll} (r_1 - d)\,\hat{u} \;+\; d\hat{v} & = \lambda\hat{u} \\ d\hat{u} + (r_2 - 2d)\,\hat{v} & = \lambda\hat{v} \\ d\hat{v} & = 0 \end{array} \right.$ qui entraîne $\underbrace{\hat{X} = 0}_{\text{impossible}}$.

On peut alors conclure :

$$\boxed{\hat{u} \neq 0, \ \hat{v} \neq 0 \text{ et } \hat{w} \neq 0}$$

17) La relation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lll} (r_1 - d)\,\hat{u} \;+\; d\hat{v} & = \lambda\hat{u} & (1) \\ d\hat{u} + (r_2 - 2d)\,\hat{v} \;+\; d\hat{w} & = \lambda\hat{v} & (2) \\ d\hat{v} \;+\; (r_3 - d)\,\hat{w} & = \lambda\hat{w} & (3) \end{array} \right.$$

les lignes (1) et (3) donnent :

$$\hat{u} = \frac{d}{\lambda - r_1 + d}\,\hat{v} \qquad \text{et} \qquad \hat{w} = \frac{d}{\lambda - r_3 + d}\,\hat{v}$$

et en les injectant dans la ligne (2) il vient :

$$\frac{d^2}{\lambda - r_1 + d}\hat{v} + (r_2 - 2d)\hat{v} + \frac{d^2}{\lambda - r_3 + d}\hat{v} = \lambda\hat{v}$$

et sachant que $\hat{v} \neq 0$ on obtient :

$$\frac{d^2}{\lambda - r_1 + d} + (r_2 - 2d - \lambda) + \frac{d^2}{\lambda - r_3 + d} = 0$$

en mettant au même dénominateur on obtient :

$$d^2(\lambda - r_3 + d) + (\lambda - r_3 + d)(r_2 - 2d - \lambda)(\lambda - r_1 + d) + d^2(\lambda - r_1 + d) = 0$$

On a bien :

$$\boxed{Q(\lambda) = 0, \text{ où } \; Q(X) = (X + d - r_1)\,(X + 2d - r_2)\,(X + d - r_3) - d^2\,(2X + 2d - r_1 - r_3)}$$

18) Développons $Q(X)$:

$$\begin{aligned}
Q(X) &= (X + d - r_1)\,(X + 2d - r_2)\,(X + d - r_3) - d^2\,(2X + 2d - r_1 - r_3) \\
&= X^3 + \big(4d - (r_1 + r_2 + r_3)\big)X^2 \\
&\qquad + ((d - r_1)(2d - r_2) + (d - r_3)(2d - r_2) + (d - r_1)(d - r_3) - 2d^2)X \\
&\qquad\qquad + \big((d - r_1)(2d - r_2)(d - r_3) - d^2(2d - r_1 - r_3)\big) \\
&= X^3 + \big(4d - (r_1 + r_2 + r_3)\big)X^2 \\
&\qquad + (3d^2 - (3r_1 + 2r_2 + 3r_3)d + r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)X \\
&\qquad\qquad + \big((d - r_1)(2d - r_2)(d - r_3) - d^2(2d - r_1 - r_3)\big) \\
&= X^3 + \big(4d - (r_1 + r_2 + r_3)\big)X^2 \\
&\qquad + (3d^2 - (3r_1 + 2r_2 + 3r_3)d + r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)X \\
&\qquad\qquad + \big(-d^2(r_1 + r_2 + r_3) + d... + ...\big)
\end{aligned}$$

Tous les coefficients de Q sont des fonctions réelles qui tendent vers $+\infty$ quand d tend vers $+\infty$, donc il existe un $\overline{d} > 0$ tel que pour tout $d \geqslant \overline{d}$ tous les coefficients de Q sont positifs.
ce qui entraine en utilisant le résultat de la question **12)** :

$$\boxed{\text{il existe un } \overline{d} > 0 \text{ tel que pour tout } d \geqslant \overline{d}, \text{ on a } \lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0 \text{ et } \lambda_3 < 0}$$