Correction de la feuille Calcul_11 : Révisions.

Ce ne sont pas des corrections rédigées. On donne les réponses associées parfois de commentaires.
Méfiez-vous c'est une nouvelle feuille, quelques erreurs se sont peut-être glissées.

1) Déterminer deux réels a et b tels que : $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}$

Réponse : $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{\frac{1}{4}}{x-2} - \dfrac{\frac{1}{4}}{x+2}$

2) Simplifier la somme double : $S = \displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} \binom{j}{i}$

Réponse : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ On peut penser au triangle de Pascal

3) Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

Réponse : $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)dx = \Big[(x+1)\ln(x+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx = 2\ln(2) - 1$

Choisir la bonne primitive qui simplifie les calculs de cette IPP.

4) Développer $(X-1)^5$.

$(X-1)^5 = X^5 - 5X^4 + 10X^3 - 10X^2 + 5X - 1$ triangle de Pascal et les signes + et - alternés

5) Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$

$\det(M) = 4i \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(M) = 2$

6) Quel est le degré du polynôme : $P = (X+2)^3 - \big(X^3 - 3\big)$?

$\deg(P) = 2$

7) Quelles sont les solutions complexes de $z^n = 1$?

ce n'est pas au programme, on l'a démontré en classe. $S = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0; n-1]\!] \right\}$

8) Justifier l'équivalent $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$

$\ln(x+1) = \ln(x)\left(1 + \dfrac{1}{\ln(x)}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$

9) Quelle la dimension de $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + 2z = 0\big\}$?

$\dim(F) = 2$.

10) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = 3$

$S = \left\{ t \longmapsto a\cos(t) + b\sin(t) + 3 \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

11) On tire au hasard un numéro dans l'ensemble $\{-1, 0, 2, 3\}$ On note X le nombre obtenu.
Quelle est la variance de X ?

$E(X) = 1,\ E(X^2) = \dfrac{7}{2}$ donc $V(X) = \dfrac{5}{2}$

12) Quelle la dimension de $F = \big\{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\big\}$?

C'est du cours $\dim(F) = 2$

13) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^2 + X - 1$

$P(X) = (2X-1)(X+1)$ ou $P(X) = 2\left(X - \dfrac{1}{2}\right)(X+1)$

14) Donner la nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n}{1+3^n}$

$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant \dfrac{2^n}{1+3^n} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge donc cette série converge.

15) Déterminer une densité associée à la fonction de répartition suivante : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 1] \\ F_X(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{2} - \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad t \in]1, 9] \\ F_X(t) = 1 & \text{si} \quad t \in]9; +\infty[\end{cases}$

$$\begin{cases} f_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 1] \\ f_X(t) = \dfrac{1}{4\sqrt{t}} & \text{si} \quad t \in]1, 9] \\ f_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]9; +\infty[\end{cases}.$$

16) Résoudre le système $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$

$S = \{\ x\,(1, 5, -4) \mid x \in \mathbb{R}\ \}$

17) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n$

En appliquant par exemplela formule du binome : $\begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18) Quelle la dimension de $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$?
Système linéaire homogène avec $n - 1$ inconnues secondaires. F est de dimension $n - 1$.

19) Déterminer la fonction de répartition de la densité suivante : $\begin{cases} f(t) = e^t & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0[\\ f(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]0; +\infty[\end{cases}$

$$\begin{cases} F(t) = e^t & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0[\\ F(t) = 1 & \text{si} \quad t \in]0; +\infty[\end{cases}$$

On cherche *(par exemple)* une primitive sur chaque intervalle et on les choisit pour que F soit continue et vérifie $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$

20) $X \longmapsto \mathscr{E}(1/3)$ Donner l'espérance et la variance de X.
Question de cours : espérance et variance d'une loi exponentielle : $E(X) = 3$ et $V(X) = 9$

21) Calculer si elle existe l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, \mathrm{d}t$

$$\int_0^1 \ln(t)\, \mathrm{d}t = -1$$

22) Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^1 x e^{(x^2)} dx$.

$$\int_0^1 x e^{(x^2)} dx = \frac{e-1}{2}$$

23) Calcul de la limite de $\dfrac{\ln(x) + x^2}{x + e^{2x}}$ quand x tend vers $+\infty$.

$\dfrac{\ln(x) + x^2}{x + e^{2x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{e^{2x}}$ et donc la limite vaut 0

24) Calculer si elle existe la somme suivante : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\frac{1}{4^n}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^2}\frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^3} = \frac{8}{27}$$

25) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Cette matrice est triangulaire, son spectre est donc $\{1, 3\}$

26) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\, \mathrm{d}t$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

27) On note $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, -x-y, 2x+2y) \end{array}$, donner la matrice de f dans les bases canoniques.

La matrice de f dans les bases canniques est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

28) $X \longmapsto \mathscr{G}(1/3)$ Donner l'espérance et la variance de X.

$E(X) = 3$ et $V(X) = 6$

29) Une urne contient 5 jetons numérotés de 1 à 5.
On tire simultanément 2 jetons. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres pairs ?

Cette probabilité vaut $\dfrac{1}{\binom{5}{2}} = \dfrac{1}{10}$

30) Calculer la dérivée de $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

$f' : x \longmapsto \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

31) Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer la limite de $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ *(vu et revu en classe)*

32) Calculer la limite $xe^{\frac{1}{x}}$ quand x tend vers 0^+.

$xe^{\frac{1}{x}} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$

33) Etude de la fonction $x \longmapsto xe^{-x}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

34) Calculer si elle existe la somme suivante : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (0,5)^n$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (0,5)^n = 1$

35) Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^2 \frac{6}{(2+x)^2} dx$

$\displaystyle\int_1^2 \frac{6}{(2+x)^2} dx = \frac{1}{2}$

36) Calculer si elle existe l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ \mathrm{dt}$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ \mathrm{dt} = 1$ *(densité de la loi exponentielle)*

37) Déterminer une densité associée à la fonction de répartition suivante : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0] \\ F_X(t) = \dfrac{t^2}{3} & \text{si} \quad t \in]0, \sqrt{3}[\\ F_X(t) = 1 & \text{si} \quad t \in]\sqrt{3}; +\infty[\end{cases}$

$$\begin{cases} f_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0] \\ f_X(t) = \dfrac{2t}{3} & \text{si} \quad t \in]0, \sqrt{3}[\\ f_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]\sqrt{3}; +\infty[\end{cases}$$

38) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Trop vu : Le spectre de $\{0; 3\}$

39) Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\text{rg}(A) = 2$

40) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y''(t) - y(t) = t$

$S = \left\{ t \longmapsto ae^t + be^{-t} - t \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

41) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'(t) + 2y(t) = 3$

$S = \left\{ t \longmapsto ae^{-2t} + \frac{3}{2} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

42) Déterminer une primitive de $x \longmapsto \exp(-x)\exp(-\exp(-x))$.

$F : x \longmapsto \exp(-\exp(-x))$ est une primitive de $x \longmapsto \exp(-x)\exp(-\exp(-x))$ sur $\mathbb{R}$

43) Déterminer une équation de la droite passant par les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(AB) \ : \ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

44) $X \longmapsto \mathscr{B}(5, 1/3)$ Donner l'espérance et la variance de X.

Question de cours : espérance et variance d'une loi exponentielle : $E(X) = \frac{5}{3}$ et $V(X) = \frac{10}{9}$

45) Calculer si elle existe la somme suivante : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$ *(somme télescopique)*

46) Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^1 te^{2t}dt$

$\int_0^1 te^{2t}dt = \left[t.\frac{1}{2}e^{2t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2t}dt = \frac{e^2+1}{4}$

47) Une urne contient 5 jetons numérotés de 1 à 5.
On tire successivement et sans remise 2 jetons. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres pairs ?

Cette probabilité vaut $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

48) Calculer la dérivée de $f : x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$f' : x \longmapsto \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

49) Calculer l'intégrale suivante : $\int_1^2 x^2 \ln(x)dx$

$\int_1^2 x^2 \ln(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}.\ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}dx = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}$

50) Simplifier $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!}e^{-\lambda}$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!}e^{-\lambda} = \exp(\lambda(x-1))$ Première question de MCR 2023

51) Calculer si elle existe l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \, \mathrm{d}t$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \, \mathrm{d}t = 2$

52) Quelle la dimension de $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$?

$\dim(F) = 2$ Plusieurs méthodes, par exemple : C'est le noyau de la forme linéaire : $P \longmapsto P(1)$

53) Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^1 3e^{-t}dt$.

$\int_0^1 3e^{-t}dt = 3(1 - e^{-1})$

54) Calculer si elle existe l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \pi$ arctan est primitive de l'intégrande

55) On tire au hasard un numéro dans l'ensemble $\{-1, 0, 2, 3\}$ On note X le nombre obtenu. Quelle est l'espérance de X ?

$E(X) = 1$

56) Calculer la limite $\quad \ln(x).\ln\big(\ln(x)\big) \quad$ quand x tend vers 1^+.

$\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x).\ln\big(\ln(x)\big) = 0$

57) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres sont -1 et 5

58) Déterminer la fonction de répartition associée à la densité suivante : $\left\{\begin{array}{lll} f(t) = 0 & \text{si} & t \in]-\infty, -1[\\ f(t) = t+1 & \text{si} & t \in]-1, 0[\\ f(t) = 1-t & \text{si} & t \in]0\,,1\,[\\ f(t) = 0 & \text{si} & t \in]1; +\infty[\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{lll} F(t) = 0 & \text{si} & t \in]-\infty, -1[\\ F(t) = \dfrac{1}{2}(t+1)^2 & \text{si} & t \in]-1, 0[\\ F(t) = 1 - \dfrac{1}{2}(t-1)^2 & \text{si} & t \in]0\,,1\,[\\ F(t) = 1 & \text{si} & t \in]1; +\infty[\end{array}\right.$$

On cherche *(par exemple)* une primitive sur chaque intervalle et on les choisit pour que F soit continue et vérifie $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$

59) Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \{1, \dots, n\}$, montrer que : $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$

Très classique : $\quad \sum\limits_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n} P(X = j) = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j} P(X = j) = \sum\limits_{j=1}^{n} jP(X = j) = E(X)$

60) Quelle la dimension de $F = \text{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} >$?

Avedc des opérations élémentaires sur les vecteurs : $\quad F$ est de dimension 2

61) Déterminer le signe de la fonction $x \longmapsto xe^{-x} - 1$.

L'étude de la fonction montre que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) < 0$

62) Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \quad$ avec le changement de variable $t = \sin(\theta)$

Cette intégrale vaut $\dfrac{\pi}{2}$

63) Calculer la dérivée de $f : x \longmapsto -\dfrac{7}{(x-2)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f' : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{x-2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

64) Donner la nature de la série : $\sum\limits_{n \geqslant 4} \dfrac{1}{n-3}$

Cette série diverge. (à un changement d'indice près c'est la série harmonique.

65) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $y'(t) + \dfrac{1}{t} y(t) = 2$

$S = \Big\{ (\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{a}{t} + t) \mid a \in \mathbb{R} \Big\}$

66) Déterminer une base orthonormale de $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + 2z = 0\big\}$.

Beaucoup de résultats possibles!!. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1); \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\right)$ est une base orthonormale de F

67) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de A sont $e^{-i\theta}$ et $e^{i\theta}$

68) Quelle la dimension de $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + y + 2z = 0 \text{ et } x + 2y + 2z = 0\big\}$?

La dimension de F est 1. On réduit avec la méthode du pivot et on compte les inconnues secondaires.

69) Déterminer la matrice des coordonnées de $u = (3, 1, -2)$ dans la base $\mathscr{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ de $\mathbb{R}^3$.

La matrice des coordonnées de $u = (3, 1, -2)$ dans cette base est $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

70) Calculer si elle existe la somme suivante : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

C'est la somme d'une série exponentielle est elle vaut e^{-1}

71) Déterminer le signe de l'expression de $\dfrac{x\ln(x) - 2x}{x^2 - 3x + 2}$ suivant les valeurs du réel x.

Sur $]0, 1[$ et sur $]2, e^2[$ on a : $f(x) < 0$, sur $]1, 2[$ et sur $]e^2; +\infty[$ on a : $f(x) > 0$
et pour $x \in \{1, 2, e^2\}$: $f(x) = 0$

72) Simplifier la somme double : $S = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$.

$\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij = \frac{n(n+1)(3n+2)(n-1)}{24}$ Voir la feuille de calcul 5

73) Déterminer une base de $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} 3x + y + 3z + t = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right. \right\}$

$((2, 1, 0, -7), (0, 0, 1, -3))$ est une base de F

74) Calcul de la limite en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1 - e^x}{\sqrt{x}}$.

$\dfrac{1 - e^x}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{-x}{\sqrt{x}}$ donc la limite vaur 0.

75) Une urne contient 5 jetons numérotés de 1 à 5.
On tire successivement et avec remise 2 jetons. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres pairs ?

Cette probabilité vaut $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{25}$

76) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme : $5X^3 - 2X + 3$
$5X^3 - 2X + 3 = (X + 1)(5X^2 - 5X + 3)$ On ne peut pas plus factoriser dasn $\mathbb{R}[X]$

77) Quelles sont les racines *(complexes)* de $X^3 - 1$?
Vu et revu : 1, $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{2i\pi}{3}}$

78) Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \underset{x \to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

79) Calculer si elle existe la somme suivante : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$

C'est la somme d'une série géométrique dérivée (à un coefficient multiplicatif près) est elle vaut : $-\dfrac{2}{9}$

80) On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^T A$.

$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

81) Donner la nature de la série : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Elle est absolument convergente donc convergente.