Banque « Agro-Véto »
BCPST - 0425

MATHÉMATIQUES
MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT
Durée : 2 heures

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.
Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois parties sont indépendantes à l'exception de la dernière question de la deuxième partie.

Partie I : Autour d'une intégrale

Soient a et b deux entiers naturels. On définit :

$$f_{a,b} \ : \ x \mapsto x^a(1-x)^b \quad \text{et} \quad I_{a,b} = \int_0^1 f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Représenter graphiquement les fonctions $f_{1,1}$ et $f_{2,1}$ sur le segment $[0,1]$.

2. Calculer $I_{0,n}$ pour tout entier naturel n.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a \neq 0$. Trouver une relation entre $I_{a,b}$ et $I_{a-1,b+1}$.

4. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall b \in \mathbb{N},\ I_{a,b} = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}.$$

5. Déterminer la limite de la suite de terme général $\dfrac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}}$.

6. Soit u une suite réelle et ℓ un réel.
Donner la définition, avec quantificateurs, de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

7. En déduire l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait :

$$\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \leq \frac{1}{2}.$$

8. En déduire que pour tout $n \geq n_0$ on a : $I_{n,n} \leq \dfrac{2^{n_0}\,I_{n_0,n_0}}{2^n}$.

9. Déterminer la nature de la série de terme général $I_{n,n}$.

9.a. Déterminer un équivalent de $\ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

9.b. En déduire la limite de $\exp\left((2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

9.c. On admet l'équivalent suivant (dit de Stirling) :

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

En déduire un équivalent de $4^n\, I_{n,n}$.

9.d. Déterminer la nature de la série de terme général $4^n\, I_{n,n}$.

Partie II : Loi bêta et statistique d'ordre

On fixe un entier naturel $n > 0$ et l'on considère n variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ indépendantes qui suivent toutes une loi uniforme sur le segment $[0,1]$.
Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note $X_{(k)}$ la k-ième plus petite valeur parmi les variables aléatoires $X_1,\ldots X_n$. On a donc, en particulier, $X_{(1)} = \min(X_1,\ldots,X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1,\ldots,X_n)$.

10. Si l'on suppose (dans cette question uniquement) que n est impair, quel nom donne-t-on à la variable $X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$?

11. Donner la fonction de répartition de X_1, son espérance et sa variance.

12. Déterminer les fonctions de répartitions de $X_{(1)}$ et $X_{(n)}$.

Pour tout triplet (a,b,c) d'entiers tels que $a+b+c = n$ et pour tout couple (x,y) de réels tels que $0 \leq x < y \leq 1$, on note $p_{a,b,c}(x,y)$ la probabilité que, parmi les n valeurs prises par les variables $X_1,\ldots,X_n$, il y en ait exactement a dans l'intervalle $[0,x]$, b dans l'intervalle $]x,y]$ et c dans l'intervalle $]y,1]$.

On admet que pour tout triplet (a,b,c) d'entiers tels que $a+b+c = n$ et pour tout couple (x,y) de réels tels que $0 \leq x < y \leq 1$, on a :

$$p_{a,b,c}(x,y) = \frac{n!}{a!\,b!\,c!}\, x^a\,(y-x)^b\,(1-y)^c.$$

13. On se donne deux réels x et h tels que $0 \leq x < x+h \leq 1$ et un entier k tel que $1 \leq k \leq n$.

13.a. Soient i et j deux entiers naturels tels que $i + j \leq n$.
Donner la probabilité que, parmi les n valeurs prises par les variables $X_1,\ldots,X_n$, il y en ait exactement i dans l'intervalle $[0,x]$ et j dans l'intervalle $]x,x+h]$.

13.b. En déduire que :

$$F_{X_{(k)}}(x+h) - F_{X_{(k)}}(x) = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=k-i}^{n-i} \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} x^i\, h^j (1-x-h)^{n-i-j}.$$

13.c. En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{F_{X_{(k)}}(x+t) - F_{X_{(k)}}(x)}{t}$ a une limite à droite en zéro.

On admet que l'on peut en déduire que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $X_{(k)}$ est une variable aléatoire de densité

$$n\binom{n-1}{k-1} f_{k-1,n-k}\, 1_{[0,1]}.$$

On appelle cette loi de probabilité la loi bêta.

14. Calculer l'espérance et la variance de $X_{(k)}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ en utilisant les résultats de la première partie.

Partie III : Propriétés des matrices bisymétriques et application

Pour tout entier n non nul, on note J_n la matrice carrée dont tous les termes sont nuls à l'exception de la deuxième diagonale qui sont égaux à 1, de sorte que :

$$\mathrm{J}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit qu'une matrice carrée M, de taille n, est *symétrique* si $M^T = M$, *persymétrique* si $M^T = \mathrm{J}_n M \mathrm{J}_n$ et *bisymétrique* si elle est à la fois symétrique et persymétrique.

15. Prouver que l'ensemble E_n des matrices bisymétriques de taille n est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

16. Prouver que la matrice J_4 est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible Q telles que $\mathrm{J}_4 = QDQ^{-1}$.

17. Justifiez que J_4 est inversible et déterminez son inverse.

18. Montrer qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est bisymétrique si et seulement s'il existe des réels a, b, c, d, e et f tels que :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & c \\ c & f & e & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

19. En déduire, sans justification, une base et la dimension de l'ensemble des matrices bisymétriques de taille 4.

20. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, Q une matrice inversible de taille n et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que λ est valeur propre de M si, et seulement si, λ est valeur propre de QMQ^{-1}.

21. Soient A, B, C, D, E, F, G et H des réels et $M = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & F \\ 0 & 0 & G & H \end{pmatrix}$.

Montrer que le spectre de M est l'union des spectres des matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$.

On pose $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'on admet que :

$$P \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & c \\ c & f & e & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e+f & b+c & 0 & 0 \\ b+c & a+d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-d & b-c \\ 0 & 0 & b-c & e-f \end{pmatrix}.$$

On considère maintenant la matrice de covariance dont le coefficient d'indice (i,j) est :

$$\mathbb{E}(X_{(i)}\,X_{(j)}) - \mathbb{E}(X_{(i)})\,\mathbb{E}(X_{(j)}).$$

On peut montrer que cette matrice est proportionnelle à la matrice V définie par :

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

22. Justifier que la matrice V est diagonalisable.

23. Déterminer le spectre de V.

Note : l'étude des valeurs propres de la matrice M permet de construire des tests statistiques simultanés sur plusieurs variables parmi les $X_{(i)}$.

FIN DU SUJET