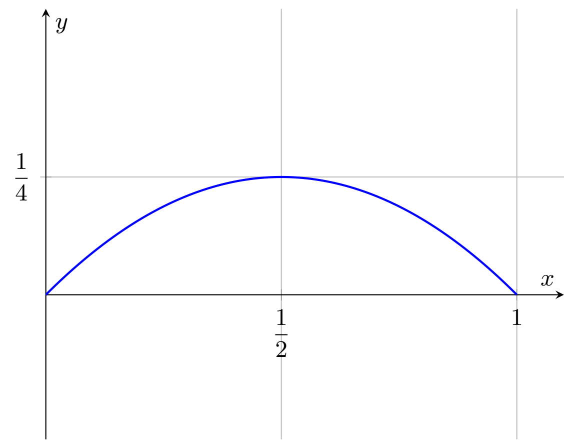
Correction du sujet : Méthodes de calcul et raisonnement (2025).

1. $f_{1,1} : x \longmapsto x(1-x)$ c'est une parabole de sommet $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, les racines du polynôme sont 0 et 1.

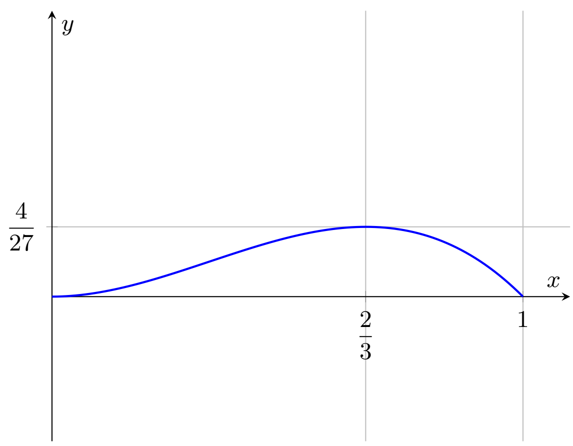
La courbe est :



$f_{2,1} : x \longmapsto x^2(1-x) = x^2 - x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_{2,1} : x \longmapsto 2x - 3x^2 = x(2-3x)$
Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

Et la courbe :



2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{0,n} = \int_0^1 x^0(1-x)^n dx = \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{1}{n}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = -0 + \frac{1}{n+1}, \text{ donc}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{0,n} = \frac{1}{n+1}}$$

3. $x \longmapsto x^a$ et $x \longmapsto \left(-\dfrac{1}{b+1}(1-x)^{b+1}\right)$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$, ce qui permet l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} I_{a,b} &= \int_0^1 x^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^a\left(-\frac{1}{b+1}(1-x)^{b+1}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 ax^{a-1}\left(-\frac{1}{b+1}(1-x)^{b+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{a}{b+1}I_{a-1,b+1} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad I_{a,b} = \frac{a}{b+1}I_{a-1,b+1}}$$

4. Montrons par récurrence sur a que pour tout $a \in \mathbb{N}$, $\underbrace{\forall b \in \mathbb{N},\ I_{a,b} = \dfrac{a!\,b!}{(a+b+1)!}}_{\mathscr{P}(a)}$

- Pour $a = 0$,

  d'une part $I_{0,b} = \dfrac{1}{b+1}$ *(d'après la question 2)*, d'autre part $\dfrac{0!\,b!}{(0+b+1)!} = \dfrac{1}{b+1}$

  La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(a)$ est vraie,

  pour $b \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{a+1,b} &= \frac{a+1}{b+1}I_{a,b+1} && \textit{(d'après la question 3))} \\ &= \frac{a+1}{b+1} \times \frac{a!\,(b+1)!}{(a+b+2)!} && \textit{(en utilisant l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(a+1)!\,b!}{(a+1+b+1)!} && \textit{(on a alors } \mathscr{P}(a+1)\textit{)} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N},\ I_{a,b} = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}}$$

5. D'après la question 4., $\dfrac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \dfrac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+3)!} \times \dfrac{(2n+1)!}{n!n!} = \dfrac{(n+1)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{4n^2} = \dfrac{1}{4}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \frac{1}{4}}$$

6. Dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ signifie que :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon}$$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \dfrac{1}{4}$ donc en utilisant la définition avec $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ et $u_n = \dfrac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}}$ il vient :

$$\boxed{\text{il existe } n_0 \text{ tel que : } \forall n \geqslant n_0,\ \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \leqslant \frac{1}{2}}$$

8. *On peut raisonner ici par récurrence sur $n \geqslant n_0$ ou en faisant un produit comme ci-dessus :*

On a : $\forall k \geqslant n_0,\ \dfrac{I_{k+1,k+1}}{I_{k,k}} \leqslant \dfrac{1}{2}$,

donc en faisant le produit pour k entre n_0 et $n-1$ il vient (*produit télescopique*) : $\dfrac{I_{n,n}}{I_{n_0,n_0}} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-n_0}}$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant n_0, \quad I_{n,n} \leqslant \frac{2^{n_0}}{2^n}I_{n_0,n_0}}$$

9. D'une part :

la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente, en effet $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ donc $\sum \frac{2^{n_0}}{2^n} I_{n_0,n_0}$ est convergente,

D'autre part : Pour tout $n \geqslant n_0$, $\quad 0 \leqslant I_{n,n} \leq \frac{2^{n_0}}{2^n} I_{n_0,n_0}$

donc (théorème de convergence par comparaison :

$$\boxed{\text{la série de terme général } I_{n,n} \text{ converge.}}$$

(a) $\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n+1}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n+1} = 0.$

$$\boxed{\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}}$$

(b) On déduit de la question précédente que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = -1$ et par composition avec exp on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \exp\left((2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right) = e^{-1}}$$

(c)

$$\begin{aligned}
4^n I_{n,n} &= 4^n \frac{n!n!}{(2n+1)!} \\
&\sim 4^n \frac{n^n.n^n}{(2n+1)^{2n+1}} \frac{e^{2n+1}}{e^n.e^n} \frac{2\pi n}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \\
&\sim \frac{1}{2n} \exp\left((2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right).e.\sqrt{\frac{2\pi n^2}{2n+1}} \\
&\sim \frac{1}{2n}.e^{-1}.e.\sqrt{\pi n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{4^n I_{n,n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

(d) D'une part : la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. et pour tout $n \geqslant 1$, $\quad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

donc *(théorème de convergence par comparaison)* : la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

D'autre part : $4^n I_{n,n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$

donc *(théorème de convergence par équivalence)* :

$$\boxed{\text{la série de terme général } 4^n I_{n,n} \text{ diverge.}}$$

10. Lorsque n est impair, $\boxed{X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \text{ est la médiane de l'échantillon } (X_1, ..., X_n)}$

11. Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]), X_1$ admet espérance et variance : $\boxed{E(X_1) = \frac{1}{2}, \quad V(X_1) = \frac{1}{12}}$,

et sa fonction de répartition est la fonction définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$.

12. $X_{(1)}$ est à valeurs dans $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
F_{X_{(1)}}(x) &= P(\min(X_1,...,X_n) \leqslant x)\\
&= 1 - P(\min(X_1,...,X_n) > x)\\
&= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k > x)\right)\\
&= 1 - \prod_{k=1}^{n} P(X_k > x) \qquad \textit{(indépendance)}\\
&= 1-(1-x)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{F_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ 1-(1-x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1.\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}}$$

$X_{(n)}$ est à valeurs dans $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
F_{X_{(n)}}(x) &= P(\max(X_1,...,X_n) \leqslant x)\\
&= P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k \leqslant x)\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant x) \qquad \textit{(indépendance)}\\
&= x^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{F_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1.\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}}$$

13. **(a)** En posant $a=i$, $b=j$ et $c=n-i-j$ et $y=x+h$, la probabilité recherchée ici est $p_{i,j,n-i-j}(x,x+h)$ donc la probabilité recherchée ici est : $\boxed{\dfrac{n!}{i!j!(n-i-j)!}x^i.h^j.(1-x-h)^{n-i-j})}$

(b) **Redaction 1.**

$$F_{X_{(k)}}(x+h) - F_{X_{(k)}}(x) = P(x < X_{(k)} \leqslant x+h)$$

On note A le nombre de X_i dans $[0,x]$ et B le nombre de X_i dans $]x,x+h]$.
$((A=i)\cap(B=j))_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}$ est un système complet d'événements donc :

$$P(x < X_{(k)} \leqslant x+h) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} P\Big((A=i)\cap(B=j)\cap(x<X_{(k)}\leqslant x+h)\Big)$$

En supprimant les termes nuls il vient :

$$\begin{aligned}
P(x < X_{(k)} \leqslant x+h) &= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=k-i}^{n-i} P\Big((A=i)\cap(B=j)\cap(x<X_{(k)}\leqslant x+h)\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=k-i}^{n-i} P\Big((A=i)\cap(B=j)\Big)
\end{aligned}$$

or $P\Big((A=i)\cap(B=j)\Big)$ est la probabilité obtenue à la question 13 (a), donc

$$\boxed{F_{X_{(k)}}(x+h) - F_{X_{(k)}}(x) = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=k-i}^{n-i}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}x^ih^j(1-x-h)^{n-i-j}.}$$

Redaction 2.

$$F_{X_{(k)}}(x+h) - F_{X_{(k)}}(x) = P(x < X_{(k)} \leqslant x+h)$$

On note A le nombre de X_i dans $[0,x]$ et B le nombre de X_i dans $]x,x+h]$.
En notant $D_k = \{\ (i,j) \in [\![0;n]\!]^2 \mid 0 \leqslant i < k \quad \text{et} \quad k \leqslant i+j \leqslant n\ \}$

$$(x < X_{(k)} \leqslant x+h) = \bigcup_{(i,j)\in D_k} (A=i)\cap(B=j)$$

En effet : $x < X_{(k)} \leqslant x+h$ revient à $A < k$ (le kième est $> x$) et $k \leqslant A+B$ (le kième est $\leqslant x+h$)

et comme cette réunion est formée d'événements deux à deux disjoints il vient :

$$P(x < X_{(k)} \leqslant x+h) \quad = \quad \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=k-i}^{n-i} P\Big((A=i)\cap(B=j)\Big)$$

or $P\Big((A=i)\cap(B=j)\Big)$ est la probabilité obtenue à la question 13 (a), donc

$$\boxed{F_{X_{(k)}}(x+h) - F_{X_{(k)}}(x) = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=k-i}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} x^i h^j (1-x-h)^{n-i-j}.}$$

(c) Pour $t>0$, on a $\dfrac{1}{t}\left(F_{X_{(k)}}(x+t) - F_{X_{(k)}}(x)\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=k-i}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} x^i t^{j-1}(1-x-t)^{n-i-j}$

dans cette somme tous les termes sont proportionnels à : $x^i t^{j-1}(1-x-t)^{n-i-j}$ avec $j-1 \geqslant 0$ donc tous ces termes admettent une limite quand t tend vers 0^+.

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto \frac{F_{X_{(k)}}(x+t) - F_{X_{(k)}}(x)}{t} \text{ a une limite à droite en zéro.}}$$

14. Les espérances et les variances existent car les densités sont bornées et nulles en dehors de $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
E(X_{(k)}) &= \int_0^1 n\binom{n-1}{k-1} x f_{k-1,n-k}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 n\binom{n-1}{k-1} f_{k,n-k}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= n\binom{n-1}{k-1} I_{k,n-k} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}.\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X_{(k)}) = \frac{k}{n+1}}$$

Le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned}
E(X_{(k)}^2) &= \int_0^1 n\binom{n-1}{k-1} x^2 f_{k-1,n-k}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 n\binom{n-1}{k-1} f_{k+1,n-k}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= n\binom{n-1}{k-1} I_{k+1,n-k} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}.\frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} \\
&= \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Puis en utilisant la formule de Koenig-Huyghens il vient :

$$\boxed{V(X_{(k)}) = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}}$$

15. • $E_n \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

• la matrice nulle 0_n vérifie : $0_n^T = 0_n$ et $J_n 0_n J_n = 0_n = 0_n^T$ donc $0_n \in E_n$.

• Soient $M, N \in E_n$ et $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$.

d'une part : comme $(\alpha M + \beta N)^T = \alpha M^T + \beta N^T$, on en déduit $(\alpha M + \beta N)^T = \alpha M + \beta N$

d'autre part, $(\alpha M + \beta N)^T = \alpha\,(J_n M J_n) + \beta\,(J_n N J_n) = J_n(\alpha M + \beta N)J_n$.

Donc $\alpha M + \beta N \in E_n$.

$$\boxed{E_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

16. J_4 est une matrice symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, $\boxed{\text{elle est diagonalisable}}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda \in Sp\,(J_4) \Leftrightarrow rg\,(J - \lambda I_4) < 4$.

En effectuant les opérations $L_1 \leftrightarrow L_4$, puis $L_2 \leftrightarrow L_3$ et $L_4 \leftarrow L_4 + \lambda L_1$, et enfin, $L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2$, on obtient une matrice triangulaire : $\operatorname{rg}(J_4 - \lambda I_4) = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}\right)$.

Donc $\operatorname{rg}(J_4 - \lambda I_4) < 4 \Leftrightarrow 1 - \lambda^2 = 0$

$$\boxed{Sp\,(J_4) = \{1, -1\}}$$

• $J_4 + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $E_{-1}(J_4) = \operatorname{Vect}(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{base de } E_{-1}(J_4)})$

• $J_4 - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $E_1(J_4) = \operatorname{Vect}(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base de } E_1(J_4)})$

Par juxtaposition des bases on obtient une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formées de vecteurs propres de J_4 et ainsi :

en posant : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on a bien : $\boxed{Q \text{ inversible, } D \text{ diagonale et } J_4 = QDQ^{-1}}$

17. On remarque que J_4 est la matrice d'une base orthonormale donc $J_4^{-1} = J_4^T$ et ainsi

$$\boxed{J_4^{-1} = J_4}$$

18. Les matrices de E_4 sont des matrices symétriques donc de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$.

Posons M une telle matrice,

$$\begin{aligned} M \in E_4 \quad &\Longleftrightarrow \quad J_4 M J_4 = M \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix} J_4 = M \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} d & g & i & j \\ c & f & h & i \\ b & e & f & g \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M \end{aligned}$$

$$M \in E_4 \iff \begin{pmatrix} j & i & g & d \\ i & h & f & c \\ g & f & e & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} j = a \\ i = b \\ g = c \\ h = e \end{cases}$$

$$\boxed{E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & c \\ c & f & e & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \middle| (a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6 \right\}}$$

19. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

est une base de E_4 et

$$\boxed{\dim(E_4) = 6}$$

20. Réponse 1 : *(Par double implication. Remarque une seule va suffire)*

- Montrons que : "si λ valeur propre de M alors λ valeur propre de QMQ^{-1}".
  On suppose connaitre un $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX = \lambda X$
  On note $Y = QX$, comme Q est inversible on sait que $Y \neq 0$ et $QMQ^{-1}Y = QMX = \lambda QX = \lambda Y$
  donc λ valeur propre de QMQ^{-1}.
- Pour montrer la réciproque il suffit d'utiliser la première implication avec $QMQ^{-1} \leftarrow M$ et $Q^{-1} \leftarrow Q$.

Réponse 2 : M et QMQ^{-1} sont semblables donc elles représentent le même endomorphisme f dans deux bases, elles ont donc le même spectre que f donc

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } M \text{ si, et seulement si, } \lambda \text{ est valeur propre de } QMQ^{-1}.}$$

21. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{(M - \lambda I_4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(*)} \iff \begin{matrix} \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - \lambda I_2 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{et} \\ \left(\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} - \lambda I_2 \right) \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

donc

- si λ est une valeur propre de $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ou de $\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$
  alors un de ces systèmes à une solution non nulle donc $(*)$ aussi donc λ valeur propre de M
- sinon la seule solution de $(*)$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc λ n'est pas valeur propre de M.

En conclusion :

$$\boxed{\text{le spectre de } M \text{ est l'union des spectres des matrices } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.}$$

22. V est réelle symétrique donc $\boxed{\text{elle est diagonalisable}}$. *(Théorème spectral)*

23. En utilisant le résultat de la question 20 et ce qui est admis juste après on a :

$$Sp(V) = Sp\left(\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = Sp\left(\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\right) \bigcup Sp\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

Et en utilisant les déterminants on obtient :
$\lambda \in Sp\left(\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\right) \iff \lambda^2 - 15\lambda + 25 = 0$ et $\lambda \in Sp\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \iff \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0.$

$$\boxed{\text{Le spectre de } V \text{ est } \left\{\frac{15 - 5\sqrt{5}}{2}, \frac{15 + 5\sqrt{5}}{2}, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right\}}$$