$\boxed{\text{Correction du sujet ENS 2025.}}$

## Partie I

**1. (a)** • $\boxed{\text{Si } a > 0}$,

pour $x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(aX + b \leqslant x) = P\left(X \leqslant \dfrac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

$F_X$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $Y$ est de densité : $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\phi_{\mu,\sigma}\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

$$\text{or} \quad \frac{1}{a}\phi_{\mu,\sigma}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(a\sigma)^2}}\exp\left(-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2(a\sigma)^2}\right)$$

On reconnait cette densité : $\boxed{Y \text{ suit la loi } \mathcal{N}(a\mu+b, a^2\sigma^2)}$

• $\boxed{\text{Si } a < 0}$,

pour $x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(aX + b \leqslant x) = P\left(X \geqslant \dfrac{x-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

$F_X$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $Y$ est de densité : $x \longmapsto -\dfrac{1}{a}\phi_{\mu,\sigma}\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

$$\text{or} \quad -\frac{1}{a}\phi_{\mu,\sigma}\left(\frac{x-b}{a}\right) = -\frac{1}{a\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(a\sigma)^2}}\exp\left(-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2(a\sigma)^2}\right) \qquad (\sqrt{a^2} = -a)$$

On retrouve le résultat : $\boxed{Y \text{ suit la loi } \mathcal{N}(a\mu+b, a^2\sigma^2)}$

**(b)** En appliquant (a) avec $a \leftarrow \dfrac{1}{\sigma}$ et $b \leftarrow -\dfrac{\mu}{\sigma}$ on a : $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(a\mu+b, a^2\sigma^2)$ donc la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$\boxed{Z \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

**2.** On note $\Phi$ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

**(a)** $\Phi$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

*(En effet : $\phi_{0,1}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$)*

Autrement dit : pour tout $\alpha \in ]0,1[$ $\boxed{\text{il existe un unique } u(\alpha) \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \Phi(u(\alpha)) = \int_{-\infty}^{u(\alpha)} \phi_{0,1}(x)\mathrm{d}x = \alpha}$

$u = \Phi^{-1}$ est bien $\boxed{\text{continue et strictemnent croissante sur } ]0,1[}$.

*Remarque : $u$ est souvent appelée fonction des quantiles de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.*

**(b)** On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ *(En effet : $x \longmapsto \Phi(x) + \Phi(-x)$ est de dérivée nulle et en 0 elle vaut 1)*
Pour $\alpha \in ]0,1[$, $\Phi(-u(\alpha)) = 1 - \Phi(u(\alpha)) = 1 - \alpha$ donc : $\boxed{-u(\alpha) = u(1-\alpha)}$

**3.**

$$\begin{aligned} P(|X_1 - \mu_1| \geqslant \delta) &= P\left(\left|\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right| \geqslant \frac{\delta}{\sigma_1}\right) \\ &= 1 - P\left(-\frac{\delta}{\sigma_1} \leqslant \frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1} \leqslant \frac{\delta}{\sigma_1}\right) \\ &= 2 - 2\,\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_1}\right) \end{aligned}$$

On montre de même : $P(|X_2 - \mu_2| \geqslant \delta) = 2 - 2\,\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma_2}\right)$

or $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$ et $\Phi$ est croissante donc $\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma_1}\right) \geqslant \Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma_2}\right)$ ce qui entraine :

$$\boxed{P(|X_1-\mu_1| \geqslant \delta) \leqslant P(|X_2-\mu_2| \geqslant \delta)}$$

**Interprétation :**

La variable aléatoire $X_1$ est moins dispersée autour de $\mu_1$ que $X_2$ autour de $\mu_2$.

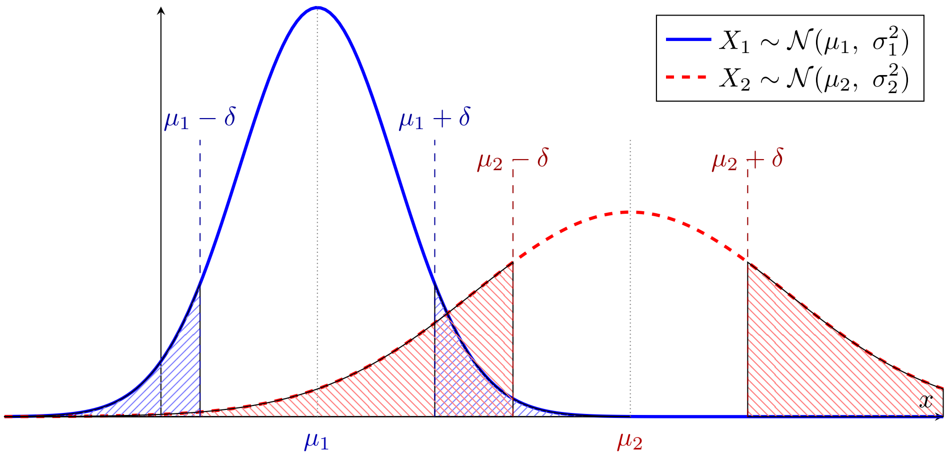
Comme $\sigma_1$ est plus faible que $\sigma_2$,

il est moins probable que $X_1$ s'éloigne de sa moyenne d'au moins $\delta$ que $X_2$,

$X_1$ est plus concentrée autour de sa moyenne.

**Illustration graphique :**

*On représente la densité continue des deux variables alétoires et on hachure l'aire correspondant aux deux probabilités.*




**4. (a)** i. La linéarité de $E(.)$ donne : $E(Y)=E(X_1)+E(X_2)$ et ainsi $\boxed{E(Y)=0}$

Par indépendance de $X_1$ et $X_2$, $V(Y)=V(X_1)+V(X_2)$ et ainsi $\boxed{V(Y)=\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

ii.

$$\begin{aligned} f_1(y-x)f_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_1^2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}\right) \end{aligned}$$

- D'une part : $-\dfrac{(y-x)^2}{2\sigma_1^2}-\dfrac{x^2}{2\sigma_2^2} = -\dfrac{y^2}{2\sigma_1^2}+\dfrac{xy}{2\sigma_1^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)x^2$
- D'autre part :

$$\begin{aligned} -\frac{y^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}-\frac{\left(x-\frac{y\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}{2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} &= -\frac{y^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x^2-\frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}xy+\frac{\sigma_2^4}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}y^2\right) \\ &= -\frac{y^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}x^2+\frac{1}{\sigma_1^2}xy-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}y^2 \\ &= -\frac{y^2}{2\sigma_1^2}+\frac{xy}{2\sigma_1^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)x^2 \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{f_1(y-x)f_2(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}-\frac{\left(x-\frac{y\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}{2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)}$$

iii. Le théorème donnant une densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes donne la convergence de l'intégrale suivante, que l'on calcule avec la formule précédente :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-x)f_2(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\left(x-\frac{y\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}{2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}\right)\qquad\underbrace{\sqrt{2\pi\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}}_{\text{on utilise la densité d'une gaussienne}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}\right)
\end{aligned}$$

On sait que $y \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-x)f_2(x)\,\mathrm{d}x$ est une densité de $Y = X_1 + X_2$ *(car $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes)* et on reconnait ci-dessus la densité continue de la loi $\mathcal{N}(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
donc

$$\boxed{Y \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$$

iv. Soient $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$ deux variables aléatoires indépendantes.
on a alors $X_1-\mu_1 \sim \mathcal{N}(0,\sigma_1^2)$ et $X_2-\mu_2 \sim \mathcal{N}(0,\sigma_2^2)$ (d'après la question 1.(a))
et $X_1-\mu_1$ et $X_2-\mu_2$ sont indépendantes.
donc d'après la question précédente : $X_1-\mu_1+X_2-\mu_2 \sim \mathcal{N}(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
et en réutilisant la question 1) il vient : $\boxed{X_1+X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$

*Ce qui achève la démonstration du lemme 1 dans le cas $n=2$.*

**(b)** On suppose connaître $(X_1,...X_n)$ $n$ variables aléatoires indépendantes et $(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que :

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i,\sigma_i^2) \quad \text{et} \quad (a_1,...,a_n)\neq 0_n$$

*(Il suffit de l'établir pour $(a_1,...,a_n)$ vérifiant $\forall i\in[\![1;n]\!], a_i\neq 0$, ce qui simplifiera la récurrence)*

• On vient de montrer que la somme de deux gaussiennes indépendantes est une gaussienne.
On montre alors par récurrence sur $n$ avec le lemme de coalition que toute combinaison linéaire de $n$ gaussiennes mutuellement indépendantes est une gaussienne. *(toute combinaison linéaire avec des coefficients non tous nuls !)*

donc on peut affirmer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_iX_i$ est une gaussienne.

• Ensuite pour avoir l'espérance et la variance, il suffit de calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_iX_i$ : sachant que $E(X_i)=\mu_i$ et $V(X_i)=\sigma_i^2$ :

- La linéarité de $E(\cdot)$ donne : $E\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_iX_i\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_iE(X_i)$ et ainsi $\boxed{E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i}$

- Par indépendance mutuelle des $X_i$ , $V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2V(X_i)$ et ainsi $\boxed{V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2}$

En conclusion, on a bien $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_iX_i \text{ est une gaussienne d'espérance } \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i \text{ et de variance } \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2}$

*Ce qui achève la démonstration du lemme 1 dans le cas général.*

**(c)** Notons $b=M^Ta$, comme $a\notin\ker(M^T)$ on a $b\neq 0_k$

on a alors $a^TMX = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} b_iX_i$ et ainsi d'après le lemme 1,

$$a^TMX \text{ suit la loi normale de d'espérance } \sum_{i=1}^{k} b_i\mu_i \text{ et de variance } \sum_{i=1}^{k} b_i^2\sigma_i^2$$

or $\quad a^T M\mu = b^T\mu = \sum_{i=1}^{k} b_i\mu_i \quad$ et $\quad a^T M\Sigma M^T a = b^T\Sigma\, b = \sum_{i=1}^{k} b_i^2\sigma_i^2$

donc on a bien : $\boxed{a^T MX \sim \mathcal{N}\left(a^T M\mu; a^T M\Sigma M^T a\right)}$

## Partie II

**1. (a)** $x \in \ker(A + U_1CU_2)$ donc $Ax + U_1CU_2x = 0_k$ ce qui entraîne en multipliant à gauche par $CU_2A^{-1}$ :

$$CU_2x + CU_2A^{-1}U_1CU_2x = 0_k$$

et comme $CU_2x = f(x)$ on obtient $f(x) + CU_2A^{-1}U_1f(x) = 0_k$ ou encore $C^{-1}f(x) + U_2A^{-1}U_1f(x) = 0_k$

d'où $\boxed{f(x) \in \ker\Big(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1\Big)}$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= (-A^{-1}U_1)(CU_2)x \\ &= -A^{-1}(U_1CU_2)x \\ &= -A^{-1}(-Ax) \qquad \textit{car } x \in \ker(A + U_1CU_2) \\ &= x \end{aligned}$$

**(b)** $x \in \ker\Big(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1\Big)$ donc $C^{-1}x + U_2A^{-1}U_1x = 0_k$ ce qui entraîne en multipliant à gauche par $-A^{-1}U_1C$ :

$$-A^{-1}U_1x - A^{-1}U_1CU_2A^{-1}U_1x = 0_k$$

et comme $-A^{-1}U_1x = g(x)$ on obtient $g(x) + A^{-1}U_1CU_2g(x) = 0_k$ ou encore $Ag(x) + U_1CU_2g(x) = 0_k$

d'où $\boxed{f(x) \in \ker(A + U_1CU_2)}$

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= (CU_2)(-A^{-1}U_1)x \\ &= -C(U_2A^{-1}U_1)x \\ &= -C(-C^{-1}x) \qquad \textit{car } x \in \ker\Big(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1\Big) \\ &= x \end{aligned}$$

**(c)** On note $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ avec $E = \ker(A + U_1CU_2)$ et $F = \ker\Big(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1\Big)$

- $\tilde{f}$ est bien définie d'après ***(a)*** et est linaire car $f$ est linéaire.
- les questions $(a)$ et $(b)$ montrent qu'il existe une application $g$ telle que : $g\circ f = Id_E$ et $f\circ g = Id_F$
  on peut en déduire que $g$ est bijective.

En conclusion : $f$ est un isomorphisme de $\ker(A + U_1CU_2)$ dans $\ker\Big(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1\Big)$

**2.** *Raisonnons par équivalence.*

$$\begin{aligned} A + U_1CU_2 \text{ est inversible} &\iff \ker(A + U_1CU_2) = \{0_n\} \\ &\iff \ker\Big(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1\Big) = \{0_k\} \qquad \textit{(car ces deux noyaux sont isomorphes)} \\ &\iff C^{-1} + U_2A^{-1}U_1 \text{ est inversible} \end{aligned}$$

On suppose que ces matrices sont inversibles et alors :

$$\begin{aligned} (A + U_1CU_2)\Big(A^{-1} - A^{-1}U_1\left(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1\right)^{-1}U_2A^{-1}\Big) &= I_n - U_1\left(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1\right)^{-1}U_2A^{-1} \\ &\quad + U_1CU_2A^{-1} - U_1CU_2A^{-1}U_1\left(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1\right)^{-1}U_2A^{-1} \\ &= I_n + U_1CU_2A^{-1} \\ &\quad - (U_1 + U_1CU_2A^{-1}U_1)\left(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1\right)^{-1}U_2A^{-1} \\ &= I_n + U_1CU_2A^{-1} \\ &\quad - U_1C(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1)\left(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1\right)^{-1}U_2A^{-1} \\ &= I_n + U_1CU_2A^{-1} - U_1CU_2A^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

Ce calcul permet de conclure la démonstration du lemme 2 avec :

$$(A + U_1CU_2)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U_1\left(C^{-1} + U_2A^{-1}U_1\right)^{-1}U_2A^{-1}$$

**3.** On raisonnera avec $t > 0$, pour $t = 0$ il n'y a pas de difficulté.

**(a)** On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0_n \Longrightarrow x^T A x > 0$ et $x^T(t\mathbb{1}_n\mathbb{1}_n^T)x = t\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0_n \Longrightarrow x^T V x > 0$ et ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0_n \Longrightarrow Vx \neq 0$ et ainsi $V$ est inversible

On applique le lemme 2 en posant $M = tI_1$, $U_1 = \mathbb{1}_n$ et $U_2 = \mathbb{1}_n^T$
sachant par ailleurs que $V$ est inversible son inverse est donné par le lemme :

$$V^{-1} = A^{-1} - \frac{t}{1 + t\,\mathbb{1}_n^T A^{-1}\mathbb{1}_n} \cdot A^{-1}\mathbb{1}_n\mathbb{1}_n^T A^{-1}$$

**(b)** $V^{-1} = A^{-1} - \dfrac{t}{1 + t\,\mathbb{1}_n^T A^{-1}\mathbb{1}_n} \cdot A^{-1}\mathbb{1}_n\mathbb{1}_n^T A^{-1}$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_n^T V^{-1}\mathbb{1}_n &= \mathbb{1}_n^T A^{-1}\mathbb{1}_n - \frac{t}{1 + t\,\mathbb{1}_n^T A^{-1}\mathbb{1}_n} \cdot \mathbb{1}_n^T A^{-1}\mathbb{1}_n\mathbb{1}_n^T A^{-1}\mathbb{1}_n \\
&= p_A - \frac{t\,p_A^2}{1 + t\,p_A}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{1}_n^T V^{-1}\mathbb{1}_n = \frac{p_A}{1 + t\,p_A}}$$

de même on a : $\mathbb{1}_n^T V^{-1} y = \mathbb{1}_n^T A^{-1} y - \dfrac{t}{1 + tp_A} p_A \mathbb{1}_n^T A^{-1} y$ et ainsi :

$$\boxed{\mathbb{1}_n^T V^{-1} y = \frac{\mu_A}{1 + t\,p_A}}$$

**(c)** • $\mathbb{1}_n^T V^{-1}\mathbb{1}_n = \dfrac{p_A}{1 + tp_A} \in \mathbb{R}$ donc $(\mathbb{1}_n^T V^{-1}\mathbb{1}_n)^{-1} = \dfrac{1 + tp_A}{p_A}$.

• On remarque que $A^{-1}\mathbb{1}_n = r$ et $p_A = \mathbb{1}_n^T r$ donc

$$\begin{aligned}
V^{-1}\mathbb{1}_n &= A^{-1}\mathbb{1}_n - \frac{t}{1 + t\,\mathbb{1}_n A^{-1}\mathbb{1}_n^T} \cdot A^{-1}\mathbb{1}_n\mathbb{1}_n^T A^{-1}\mathbb{1}_n \\
&= r - \frac{t}{1 + tp_A} \cdot r\mathbb{1}_n^T r \\
&= r - \frac{t}{1 + tp_A} \cdot p_A\, r \\
&= \frac{1}{1 + tp_A}\, r
\end{aligned}$$

On en déduit que $(\mathbb{1}_n^T V^{-1}\mathbb{1}_n)^{-1} V^{-1}\mathbb{1}_n = \dfrac{1}{p_A} r$, or $p_A = \mathbb{1}_n^T r$ donc

$$\boxed{(\mathbb{1}_n^T V^{-1}\mathbb{1}_n)^{-1} V^{-1}\mathbb{1}_n = (\mathbb{1}_n^T r)^{-1}\, r}$$

## Partie III

**1.** *(On fait comme si on ne connaissait pas l'inégalité de Cauchy-Schwarz)*

**(a)** on note $b = \dfrac{1}{n}\mathbb{1}_n$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i + b_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - 2\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 \qquad \textit{(car } b = \tfrac{1}{n}\mathbb{1}_n\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 + \frac{1}{n} \qquad \textit{(car } a^T\mathbb{1}_n = 1\textit{)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \frac{1}{n} \text{ et l'égalité est réalisée pour le vecteur } b = \frac{1}{n}\mathbb{1}_n}$

**(b)** On note $b = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^{-1} r$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} a_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}(a_i - b_i + b_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}(a_i - b_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} b_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}(a_i - b_i)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i - \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^{-2} \sum_{i=1}^{n} r_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}(a_i - b_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} a_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^{-1} \text{ et l'égalité est réalisée pour le vecteur } b = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^{-1} r}$

**(c)** i. • $V = M^T M$ donc $V^T = M^T (M^T)^T = M^T M = V$ donc $\boxed{V \text{ est symétrique}}$

• Si $x^T V x \leqslant 0$ alors $||Mx||^2 \leqslant 0$ ce qui entraine $Mx = 0_m$ puis $x = 0_n$ (car $rg(M) = n$ donc on a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n \Longrightarrow x^T V x > 0}$.

ii. • $V$ est symétrique réelle donc *(théorème spectral)* $\boxed{V \text{ diagonalisable}}$

• Pour $x \neq 0_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, si $Vx = \lambda x$ alors $x^T V x = \lambda ||x||^2$ or on sait $x^T V x > 0$ donc $\lambda > 0$

$$\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } V \text{ sont strictement positives.}}$$

iii. • On vient de montrer que 0 n'est pas valeur propre de $V$ donc $\boxed{V \text{ est inversible}}$

• Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq 0_n$, on note $y = V^{-1}x$ *(on sait que $y \neq 0_n$)*,

$$\begin{aligned}
x^T V^{-1} x &= (Vy)^T V^{-1} (Vy) \\
&= y^T V y \quad > 0
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n \Longrightarrow x^T V x > 0}$

iv. On note $b = (\mathbb{1}_n^T V^{-1} \mathbb{1}_n)^{-1} V^{-1} \mathbb{1}_n$ et on remarque que : $V^{-1}$ est symétrique et $\mathbb{1}_n^T V^{-1} \mathbb{1}_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
a^T V a &= (a - b + b)^T V (a - b + b) \\
&= (a - b)^T V (a - b) + (a - b)^T V b + b^T V (a - b) + b^T V b \\
&= (a - b)^T V (a - b) + a^T V b + b^T V a - b^T V b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b^T V a &= (\mathbb{1}_n^T V^{-1} \mathbb{1}_n)^{-1} \mathbb{1}_n^T V^{-1} V a \\
&= (\mathbb{1}_n^T V^{-1} \mathbb{1}_n)^{-1} \mathbb{1}_n^T a \\
&= (\mathbb{1}_n^T V^{-1} \mathbb{1}_n)^{-1} \qquad \textit{(car } \mathbb{1}_n^T a = 1\textit{)}
\end{aligned}$$

et $b^T V a = (a^T V b)^T$ car ce sont des matrices $1 \times 1$ et $V^T = V$ donc $b^T V a = a^T V b$

$$\begin{aligned}
b^T V b &= (\mathbb{1}_n^T V^{-1} \mathbb{1}_n)^{-1} \mathbb{1}_n^T V^{-1} V (\mathbb{1}_n^T V^{-1} \mathbb{1}_n)^{-1} V^{-1} \mathbb{1}_n \\
&= (\mathbb{1}_n^T V^{-1} \mathbb{1}_n)^{-2} (\mathbb{1}_n^T V^{-1} \mathbb{1}_n) \\
&= (\mathbb{1}_n^T V^{-1} \mathbb{1}_n)^{-1}
\end{aligned}$$

donc

$$a^TVa = (a-b)^TV(a-b) + (\mathbb{1}_n^TV^{-1}\mathbb{1}_n)^{-1}$$

Sachant que $(a-b)^TV(a-b) \geqslant 0$ et $(a-b)^TV(a-b) = 0 \Longrightarrow a = b$ il vient :

$$\boxed{a^TVa \geqslant \left(\mathbb{1}_n^TV^{-1}\mathbb{1}_n\right)^{-1}, \text{ et l'égalité est réalisée pour le vecteur } b = \left(\mathbb{1}_n^TV^{-1}\mathbb{1}_n\right)^{-1}V^{-1}\mathbb{1}_n}$$

v. • En prenant $V = I_n$ *(ou $M = I_n$)* on obtient $a^Ta \geqslant \dfrac{1}{n}$ et l'égalité pour $b = \dfrac{1}{n}\mathbb{1}_n$

on retrouve le résultat de la question **1.(a)**.

• En prenant $V = Diag\left(\dfrac{1}{r_i}\right)$ *(ou $M = Diag\left(\dfrac{1}{\sqrt{r_i}}\right)$)* on obtient bien : $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{r_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^n r_i\right)^{-1}$

et l'égalité pour $b = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i\right)^{-1} r$

on retrouve le résultat de la question **1.(b).**

**2. (a)** En utilisant les résultats de la partie I on sait que $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n Y_i$ est une gaussienne :

la linéarité de $E(\,.\,)$ donne $E(M_n) = \mu$ et l'indépendance mutuelle des $Y_i$ donne $V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

$$\boxed{M_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

**(b)** En prenant pour vecteur déterministe : $a = \dfrac{1}{n}\mathbb{1}_n$, on peut affirmer que $M_n$ est un estimateur linéaire et comme de plus $E(M_n) = \mu$ il vient :

$$\boxed{M_n \text{ est un estimateur linéaire sans biais de } \mu}$$

**(c)** $Q_n(a)$ est un estimateur linéaire donc $Q_n(a)$ est une gaussienne :

la linéarité de $E(\,.\,)$ donne $E(Q_n(a)) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \mu a_i = \mu$ et l'indépendance mutuelle des $Y_i$ donne

$$V(Q_n(a)) = \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma^2$$

$$\boxed{Q_n(a) \text{ est une gaussienne d'espérance } \mu \text{ et de variance } a^Ta\,\sigma^2}$$

**(d)** $a \in F_n$, $\quad Q_n(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_iY_i \quad$ et $\quad E(Q_n(a)) = \mu$

$$\boxed{Q_n(a) \text{ est un estimateur linéaire sans biais de } \mu}$$

**(e)** on a vu à la question **1.(a)** que $a^Ta \geqslant \dfrac{1}{n}$ donc $a^Ta\,\sigma^2 \geqslant \dfrac{\sigma^2}{n}$

$$\boxed{V(Q_n(a)) \geqslant V(M_n)}$$

**Interprétation** : $M_n$ est l'estimateur linéaire sans biais de $\mu$ avec le plus faible écart-type.

**(f)** Il suffit d'appliquer le résultat de la question **I 3.** avec $\sigma_1 = V(M_n)$ et $\sigma_2 = V(Q_n(a))$

$$\boxed{\mathbb{P}\left[|M_n - \mu| \geqslant \delta\right] \leqslant \mathbb{P}\left[|Q_n(a) - \mu| \geqslant \delta\right]}$$

**Interprétation** :

$M_n$ s'éloigne moins de $\mu$ que $Q_n(a)$, $M_n$ est le moins dispersé des estimateurs linéaires de $\mu$.

*(Voir interprétation Partie I)*

**(g)** L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne : $0 \leqslant \mathbb{P}\left[|M_n - \mu| \geqslant \delta\right] \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\delta^2}$ donc *(th. des gendarmes)*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[|M_n - \mu| \geqslant \delta\right] = 0}$$

**Interprétation** : *( Loi faible des grands nombres, $(M_n)$ converge en probabilité vers $\mu$ )*

Pour $n$ suffisament grand la moyenne arithmétique est une bonne approximation du paramètre $\mu$.
Et cet estimateur est le "meilleur" parmi l'ensemble des estimateurs linéaires sans biais de $\mu$.

**3. (a)** $Y_i \sim \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{r_i^2}\right)$ et $Q_n(r) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i\right)^{-1} \displaystyle\sum_{i=1}^n r_i Y_i$ donc

$$E(Q_n(r)) = \left(\sum_{i=1}^n r_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^n r_i E(Y_i) \ = \ \mu \qquad V(Q_n(r)) = \left(\sum_{i=1}^n r_i\right)^{-2} \sum_{i=1}^n r_i^2 V(Y_i) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n r_i}$$

et ainsi avec le lemme 1 :

$$\boxed{Q_n(r) \text{ suit la loi normale d'espérance } \mu \text{ et de variance } \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n r_i}}$$

On sait que : $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}\right) \geqslant n^2$ (question III 1. (b)) et on a supposé : $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \leqslant n$

donc $\forall \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i \geqslant n$ et ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(Q_n(r)) = 0$

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev il vient : $0 \leqslant \mathbb{P}\left[|Q_n(r) - \mu| \geqslant \delta\right] \leqslant \dfrac{V(Q_n(r))}{\delta^2}$
ce qui permet de conclure *(th. des gendarmes)*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[|Q_n(r) - \mu| \geqslant \delta\right] = 0}$$

**(b)** $M_n$ est toujours une gaussienne d'espérance $E(M_n) = \mu$ et de variance $V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}$

on a : $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}\right) \geqslant n^2$ donc $\boxed{V(Q_n(r)) \leqslant V(M_n)}$

Comme de l'écart-type de $Qn(r)$ est plus petit, on va préférer $Q_n(r)$ à $M_n$.

*(On utilise l'interprétation de la question **I 3.** )*

**Interprétation** de la forme de $Q_n(r)$ *(un estimateur linéaire sans biais)* :

Il accorde plus d'importance aux données avec le plus faible écart-type pour estimer $\mu$.

**4.** $M_n$ est toujours une gaussienne d'espérance $\mu$ et

$$\begin{aligned} V(M_n) &= V\left(\frac{\sigma\varepsilon_0}{\sqrt{r_0}} + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma\varepsilon_i}{\sqrt{r_i}}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{r_0} + \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \qquad \textit{(Indépendance des } \varepsilon_i\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{M_n \text{ suit la loi normale d'espérance } \mu \text{ et de variance } \frac{\sigma^2}{r_0} + \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}}$$

On remarque que la $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(M_n) = \frac{\sigma^2}{r_0} \neq 0$

et on sait ( question I 3. ) que : $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 2 - 2\,\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sqrt{M_n}}\right)$

donc

$$\boxed{P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \text{ ne tend pas vers 0 quand } n \text{ tend vers } +\infty}$$

**Interprétation** :

Il a ici une perturbation commune à toutes les données qui explique que $M_n$ fluctue toujours autour de $\mu$ même pour une grande quantité de données.

**5.** **(a)** $Y = \mu \mathbb{1}_n + \sigma ME$ donc $a^T Y = \mu a^T{}_n + \sigma a^T ME$ ou encore $a^T Y = \mu + \sigma a^T ME$
et en utilisant le corollaire 1 on sait que $a^T ME \sim \mathcal{N}(0, a^T MM^T a)$ donc

$$\boxed{a^T Y \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2 ||M^T a||^2\right)}$$

**(b)** *(Cherchons l'estimateur avec le plus faible écart-type).*
On utilise ici le résultat de la question III 1. (c) :
En posant : $V = MM^T$ *(ici il faut inverser l'ordre du produit utilisé dans la partie III)*
$||M^T a||^2 = a^T V a$ est minimum pour $a = \left(\mathbb{1}_n^T V^{-1} \mathbb{1}_n\right)^{-1} V^{-1} \mathbb{1}_n$
On choisira l'estimateur :

$$\boxed{Z_n = \left(\mathbb{1}_n^T (MM^T)^{-1} \mathbb{1}_n\right)^{-1} \mathbb{1}_n^T (MM^T)^{-1} Y}$$

**(c)** • Dans la question 2. c'est le cas précédent avec $M = I_n$ ce qui donne bien $Z_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^n Y_i$

• Dans la question 3. c'est le cas précédent avec $M = Diag\left(\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}, ..., \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}\right)$

on a alors $(MM^T)^{-1} = Diag(r_1, ..., r_n)$ ce qui donne bien $Z_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i\right)^{-1} \displaystyle\sum_{i=1}^n r_i Y_i$

• Dans la question 4. c'est le cas précédent avec $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_0}} & \frac{1}{\sqrt{r_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{r_0}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{r_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{1}{\sqrt{r_0}} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{r_n}} \end{pmatrix}$

**6.** Avec la matrice précédente on a : $MM^T = A + \dfrac{1}{r_0} \mathbb{1}_n \mathbb{1}_n^T$ où $A = Diag\left(\dfrac{1}{r_1}, ..., \dfrac{1}{r_n}\right)$

et on note $V = A + \dfrac{1}{r_0} \mathbb{1}_n \mathbb{1}_n^T$

En utilisant le résultat de la question II 3. (c) on a : $(\mathbb{1}_n^T V^{-1} \mathbb{1}_n)^{-1} V^{-1} \mathbb{1}_n = (\mathbb{1}_n^T r)^{-1} r$

on obtient alors : $Z_n = (\mathbb{1}_n^T r)^{-1} r^T Y$

on retrouve l'estimateur de la question 3 : $\boxed{Z_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i\right)^{-1} \displaystyle\sum_{i=1}^n r_i Y_i}$

Cela donne : $Z_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i\right)^{-1} \displaystyle\sum_{i=1}^n r_i \left(\mu + \dfrac{\sigma \varepsilon_0}{\sqrt{r_0}} + \dfrac{\sigma \varepsilon_i}{\sqrt{r_i}}\right) = \mu + \dfrac{\sigma \varepsilon_0}{\sqrt{r_0}} + \sigma \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i\right)^{-1} \displaystyle\sum_{i=1}^n \sqrt{r_i}\, \varepsilon_i$

L'espérance de $Z_n$ est toujours $\mu$ et la variance vaut $\dfrac{\sigma^2}{r_0} + \sigma^2 \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i\right)^{-1}$

et $\displaystyle\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{r_i} \leqslant n$ entraîne que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n r_i \geqslant n$ et ainsi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} V(Z_n) = \dfrac{\sigma^2}{r_0} \neq 0$

Donc $\boxed{Z_n \text{ ne converge pas en probabilité vers la variable certaine égale à } \mu}$.

**Interprétation** : Lorsqu'une perturbation est commune à toutes les données on ne parvient pas à trouver un estimateur linéaire sans biais de $\mu$ qui converge en probabilité vers $\mu$.

## Partie IV

**1.** **(a)** $X_{AB} = \mu + \varepsilon_{AB}$ et $\varepsilon_{AB} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t_{AB})$ donc *(question I 1. (a))* $\boxed{X_{AB} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 t_{AB})}$

$X_A = \mu + \varepsilon_{AB} + \varepsilon_A$ et $\varepsilon_{AB}$ et $\varepsilon_A$ sont indépendantes donc $\boxed{X_A \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2(t_{AB} + t_A))}$

de même on montre : $\boxed{X_B \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2(t_{AB} + t_B))}$

**(b)** $Y = \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + \varepsilon_{AB} + \varepsilon_A \\ \mu + \varepsilon_{AB} + \varepsilon_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{AB} \\ \varepsilon_A \\ \varepsilon_B \end{pmatrix}$

donc en posant $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a bien $\boxed{Y = \mu \mathbb{1}_2 + M_2 E}$

**(c)** *Cette question ne pose pas de problème en supposant $\varepsilon_{AB}, \varepsilon_A, \varepsilon_B$ sont mutuellement indépendantes, mais ici on fait juste l'hypothèse d'une indépendance 2 à 2.*

*Je réponds avec l'hypothèse supplémentaire : "$\varepsilon_{AB}, \varepsilon_A, \varepsilon_B$ sont mutuellement indépendantes" et je n'utilise pas le corollaire 1 de la partie I.*

$Y = \begin{pmatrix} \mu + \varepsilon_{AB} + \varepsilon_A \\ \mu + \varepsilon_{AB} + \varepsilon_B \end{pmatrix}$ donc $Q_2(a) = a^T Y = \mu + a_1 \varepsilon_A + a_2 \varepsilon_B + (a_1 + a_2)\varepsilon_A B$

donc (comme $a_1 + a_2 + a_1 + a_2 \neq 0$) $Q_2(a)$ est une gaussienne

d'espérance $E(Q_2(a)) = \mu$ et de variance $V(Q_2(a)) = \sigma_2(a_1^2 t_A + a_2^2 t_A + (a_1 + a_2)^2 t_{AB})$

or $a^T M_2 D_{AB} M_2^T a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{AB} + t_A & t_{AB} \\ t_{AB} & t_{AB} + t_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 t_A + a_2^2 t_A + (a_1 + a_2)^2 t_{AB}$

$$\boxed{Q_2(a) \text{ est une gaussienne d'espérance } \mu \text{ et de variance } a^T M_2 D_{AB} M_2^T a}$$

**(d)**

$$\begin{aligned} M_2 D_{AB} M_2^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & t_A & 0 \\ 0 & 0 & t_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_{AB} & t_A & 0 \\ t_{AB} & 0 & t_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_{AB} + t_A & t_{AB} \\ t_{AB} & t_{AB} + t_B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_{AB} & t_{AB} \\ t_{AB} & t_{AB} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_A & 0 \\ 0 & t_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on a bien :

$$\boxed{M_2 D_{AB} M_2^T = t_{AB} \mathbb{1}_2 \mathbb{1}_2^T + \begin{pmatrix} t_A & 0 \\ 0 & t_B \end{pmatrix}}$$

**2.** *(Non corrigé)*

**3.** *(Non corrigé)*