**SESSION 2025**

CONCOURS G2E

# MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

**Les calculatrices programmables et alphanumériques sont interdites. Les téléphones portables et autres «smartphones» doivent être éteints au cours de l'épreuve et ne doivent en aucun cas être utilisés même à titre de montre.**
**L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.**
**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.**
**Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.**
**La rédaction se fera uniquement à l'encre bleue ou noire et l'utilisation du blanc correcteur est interdite. Les découpages et collages sur la copie sont interdits.**
**Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.**

---

## PROBLÈME 1

Dans tout le problème, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\Omega$ un ensemble et $\mathscr{T}$ une tribu sur cet ensemble.

On rappelle que si $A$ est une partie de $\Omega$, on appelle fonction indicatrice de $A$ l'application définie ci-dessous :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}. \end{array}$$

Ainsi, si $A$ est un événement, alors $\mathbb{1}_A$ est la variable aléatoire valant 1 si l'événement $A$ est réalisé et 0 sinon.

On rappelle également que la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ se note classiquement $\lfloor x \rfloor$.

Dans tout le problème, on considère quatre variables aléatoires $X$, $Y$, $Z$ et $T$ définies sur $\Omega$, mutuellement indépendantes telles que $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0,1]$, $Y$ la loi de Bernoulli de paramètre $y \in [0,1]$, $Z$ la loi de Bernoulli de paramètre $z \in [0,1]$ et $T$ la loi de Bernoulli de paramètre $t \in [0,1]$.

Ce problème est consacré à des situations variées issues de l'étude de $X$, $Y$, $Z$ et $T$.

En partie A, on étudie quatre variables aléatoires obtenues à partir de $X$, $Y$, $Z$ et $T$. Dans la partie B (qui dépend de la partie A), on étudie un problème concret pouvant se modéliser à l'aide de $X$, $Y$, $Z$ et $T$.

Les parties C et D sont plus algébriques et indépendantes des deux parties A et B. En partie C, on calcule la probabilité qu'une matrice soit diagonalisable et en partie D, on s'intéresse à deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à leurs endomorphismes canoniquement associés puis on résout une équation du troisième degré dont l'inconnue est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

## Partie A : Variables aléatoires déduites de $X$, $Y$, $Z$ et $T$

1. Soit $S$ la somme définie par $S = X + Y + Z + T$ et $P$ le produit défini par $P = XYZT$.
   (a) Calculer l'espérance de $S$ et sa variance.
   (b) Justifier que $P$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
2. On pose $M = \max\{X, Y, Z, T\}$ et $N = \min\{X, Y, Z, T\}$.
   (a) Justifier que ces deux variables aléatoires suivent également des lois de Bernoulli dont on déterminera les paramètres.
   (b) À quelle condition nécessaire et suffisante, $M$ et $N$ sont-elles indépendantes ?

## Partie B : Quatre doctorantes

Un laboratoire de recherche en géologie dispose de $n$ échantillons de roches numérotés de 1 à $n$. Quatre doctorantes, Xavière, Yasmine, Zélie et Tina doivent chacune mener des expériences sur ces $n$ échantillons. Malheureusement, pour chacune de ces $4n$ expériences, il existe un risque que l'expérience ne soit pas concluante.

On admet que, à chaque expérience, Xavière a une probabilité $x$ que l'expérience soit non concluante. De même les probabilités correspondantes à chacune des expériences de Yasmine, Zélie et Tina sont respectivement $y$, $z$ et $t$. On admet également que les $4n$ expériences sont mutuellement indépendantes.

3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $A_i$ l'événement «les quatre expériences menées sur le $i$-ème échantillon sont toutes non concluantes».
   (a) Démontrer que $P(A_i) = xyzt$.
   (b) Exprimer par une phrase en français ce que représente la variable aléatoire définie par la somme $\mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}$ et donner, en justifiant, la loi suivie par celle-ci.
   (c) Calculer la probabilité qu'un seul échantillon ait donné quatre expériences toutes non concluantes.
4. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $B_i$ l'événement «au moins une des quatre expériences menées sur le $i$-ème échantillon est non concluante».
   (a) Que représente la variable aléatoire définie par la somme $\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2} + \cdots + \mathbb{1}_{B_n}$ ?
   (b) Exprimer sous forme d'une somme, la probabilité qu'au plus la moitié des échantillons aient donné quatre expériences non toutes concluantes.

## Partie C : En algèbre

Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & T(\omega) \end{pmatrix}.$$

5. (a) Justifier que si l'événement $Y = Z$ est réalisé alors $A$ est diagonalisable.
   (b) Calculer $P(Y = Z)$.

6. On suppose dans cette question uniquement que l'événement $Y \neq Z$ est réalisé.
   (a) Justifier que $A$ est triangulaire et déterminer le spectre de $A$.
   (b) Calculer $P(X \neq T | Y \neq Z)$.
7. À l'aide des questions précédentes, calculer la probabilité que $A$ soit diagonalisable.

### Partie D : Résolution d'une équation du troisième degré

Dans cette dernière partie, on suppose que d'une part les variables aléatoires $Y$ et $Z$ prennent la valeur 1 et que d'autre part $X$ et $T$ prennent la même valeur. On considère donc les matrices $A$ et $B$ ci-dessous et leurs endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $u' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ respectivement canoniquement associés :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. (a) Démontrer que $u$ n'est pas bijectif.
   (b) $u'$ est-il bijectif ?
   (c) Donner une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ orthonormale de $\mathbb{R}^2$ telle que $u$ est représentée dans $\mathcal{B}$ par la matrice diagonale $D$ ci-dessous où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels tels que $\alpha < \beta$ :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

   (d) Déterminer la représentation matricielle de $u'$ dans la base $\mathcal{B}$.
9. Dans cette dernière question, on résout l'équation $(E)$ ci-dessous d'inconnue $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ :

$$v^3 + v = u \qquad (E).$$

   On procède pour cela par analyse-synthèse, c'est-à-dire qu'on suppose qu'il existe au moins une solution $v$ pour en déduire la (ou les) valeur(s) prise(s) par $v$ puis réciproquement, on vérifie que cette ou ces valeur(s) est (sont) solution(s).
   (a) Soit $v$ est une solution de $(E)$. Démontrer que $u \circ v = v \circ u$ et en déduire que $e_1$ et $e_2$ sont deux vecteurs propres de $v$, on notera $\lambda$ et $\mu$ les valeurs propres respectivement associées.
   (b) Démontrer que $\lambda^3 + \lambda = 0$, en déduire que $\lambda = 0$ et déterminer également l'unique valeur prise par $\mu$.
   (c) En déduire que $v$ peut prendre une unique valeur et que celle-ci est une projection orthogonale que l'on exprimera en fonction de $u$.
   (d) Résoudre $(E)$.

## PROBLÈME 2

Dans tout le problème $k$ désigne un nombre réel strictement positif.

On appelle «nombre d'or» le nombre noté $\varphi$ défini par $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6$.

Ce second problème est consacré à l'étude d'une loi dont les applications en économie sont très nombreuses.

En partie A, on étudie quelques propriétés analytiques d'une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette dernière, dans un cas particulier, fait intervenir le nombre d'or.

En partie B, on utilise la fonction étudiée précédemment pour construire une fonction densité (mais les deux parties sont très largement indépendantes). On définit, à l'aide de cette fonction densité, une variable aléatoire $X$ que l'on étudie à travers deux situations.

## Partie A : Quelques propriétés d'une fonction

1. On considère la fonction $e_k$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e_k(x) = k\,\mathrm{e}^{-(k+1)\ln(x)}.$$

   (a) Étudier les variations de $e_k$.

   (b) En déduire que $e_k$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ et donner sa bijection réciproque.

   (c) $e_k$ admet-elle une ou plusieurs asymptote(s) verticale(s) ? horizontale(s) ? Justifier votre réponse.

2. (a) Donner une équation du second degré à coefficient entiers relatifs (les plus simples possibles) dont $\varphi$ est une solution.

   (b) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de $e_k$ au point d'abscisse 1 puis exprimer en fonction de $\varphi$ la valeur de $k$ telle que le coefficient directeur de cette tangente est égal à $-1$. Vérifier enfin que dans ce cas, cette tangente coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(\varphi, 0)$.

   (c) Dans cette question uniquement on suppose $k = \varphi - 1$. Représenter en repère orthonormal la courbe représentative de $e_{\varphi-1}$ ainsi que sa tangente au point d'abscisse 1.

3. Démontrer que $e_k$ vérifie la propriété ci-dessous dite «des rapports constants» sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ :

$$\forall (x, y, x', y') \in I^4, \quad \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \Leftrightarrow \frac{e_k(x)}{e_k(y)} = \frac{e_k(x')}{e_k(y')}.$$

## Partie B : Quelques propriétés d'une nouvelle loi

On définit dorénavant la fonction $f_k$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \begin{cases} e_k(x) & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

4. (a) $f_k$ est-elle une fonction continue ?

   (b) Démontrer que $f_k$ est une densité de probabilité.

5. Dorénavant $X$ désigne une variable aléatoire réelle dont $f_k$ est une densité.

   (a) Déterminer $F_k$ la fonction de répartition de $X$.

   (b) On appelle fonction de survie la fonction définie par $S_k = 1 - F_k$. Démontrer que $S_k$ vérifie la propriété des rapports constants sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

   (c) Démontrer que $X$ admet une espérance finie si, et seulement si, $k > 1$. Pour $k > 1$, donner la valeur de cette espérance.

6. Dans cette question uniquement, on a $k = 1$ de sorte que $X$ désigne une variable aléatoire réelle dont $f_1$ est une densité.

   (a) Donner la fonction de répartition de $X - 1$ et vérifier que $X - 1$ est une variable aléatoire à densité.

   (b) Démontrer que $X - 1$ et $\frac{1}{X-1}$ suivent la même loi.

7. On revient au cas général pour $k \in ]1, +\infty[$ et on suppose que $X$, dont la densité est $f_k$, modélise la répartition des richesses dans un certain pays et dans une certaine unité monétaire.

   (a) Démontrer que dans ce pays, pour faire partie des 20% les plus riches il faut posséder une richesse au moins égale à :
   $$q = 5^{\frac{1}{k}}.$$

   (b) Exprimer $\int_q^{+\infty} x f_k(x) \,\mathrm{d}x$ en fonction de $k$. Que représente cette intégrale ?

   (c) Démontrer que l'équation ci-dessous d'inconnue $k \in ]1, +\infty[$ admet une unique solution $k_0$ :
   $$\int_q^{+\infty} x f_k(x) \,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\, E(X).$$

   (d) Interpréter l'égalité précédente lorsque $k = k_0$.