

PROBLÈME I

Partie A.

1. (a) La linéarité de $E(\cdot)$ donne $E(S) = E(X) + E(Y) + E(Z) + E(T)$ donc

$$\boxed{\text{L'espérance de } S \text{ est égale à } x + y + z + t}$$

Les variables sont mutuellement indépendantes donc $V(S) = V(X) + V(Y) + V(Z) + V(T)$ donc

$$\boxed{\text{La variance de } S \text{ est égale à } x(1-x) + y(1-y) + z(1-z) + t(1-t)}$$

- (b) P est le produit de variables qui prennent pour valeurs 0 ou 1, donc P aussi et P suit une loi de Bernoulli. de plus $(P = 1) = (X = 1) \cap (Y = 1) \cap (Z = 1) \cap (T = 1)$ et les variables sont mutuellement indépendantes donc $\mathbb{P}(P = 1) = xyz t$

$$\boxed{P \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } xyz t}$$

2. (a) M est la valeur maximale prise par des variables qui prennent pour valeurs 0 ou 1, donc M aussi et M suit une loi de Bernoulli.

de plus $(M = 0) = (X = 0) \cap (Y = 0) \cap (Z = 0) \cap (T = 0)$ et les variables sont mutuellement indépendantes donc $\mathbb{P}(M = 0) = (1-x)(1-y)(1-z)(1-t)$

$$\boxed{M \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } 1 - (1-x)(1-y)(1-z)(1-t)}$$

m est la valeur minimale prise par des variables qui prennent pour valeurs 0 ou 1, donc m aussi et m suit une loi de Bernoulli.

de plus $(N = 1) = (X = 1) \cap (Y = 1) \cap (Z = 1) \cap (T = 1)$ et les variables sont mutuellement indépendantes donc $\mathbb{P}(N = 1) = xyz t$

$$\boxed{N \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } xyz t}$$

- (b) On sait $P((M = 0) \cap (N = 1)) = 0$ donc si M et N sont indépendantes alors $\mathbb{P}(M = 0) = 0$ ou $\mathbb{P}(N = 1) = 0$ donc nécessairement M est certaine égale à 1 ou N est certaine égale à 0.

Réciproquement, si une de ces deux variables aléatoires est certaine alors elles sont indépendantes.

de plus M est certaine égale à 1 si, et seulement si, $x = 1$ ou $y = 1$ ou $z = 1$ ou $t = 1$

et N est certaine égale à 0 si, et seulement si, $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$ ou $t = 0$

En conclusion :

$$\boxed{M \text{ et } N \text{ sont indépendantes si, et seulement si, } (x, y, z, t) \notin]0, 1[^4}$$

Partie B.

3. On note X_i (resp. Y_i , Z_i et T_i) la variable aléatoire de Bernoulli qui prend la valeur 1 si, et seulement si, l'expérience menée par Xavière (resp. Yasmine, Zélie et Tina) sur l'échantillon i .

- (a) $A_i = (X_i = 1) \cap (Y_i = 1) \cap (Z_i = 1) \cap (T_i = 1)$ et ces 4 variables sont mutuellement indépendantes donc

$$\boxed{P(A_i) = xyz t}$$

- (b) $\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}$ est le nombre d'échantillons pour lesquels les quatre expériences ont été non concluantes

$\mathbb{1}_{A_i}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $xyz t$ et les variables $(\mathbb{1}_{A_i})_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendantes.

$$\text{donc } \boxed{\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n} \text{ suit la loi binomiale de paramètres } (n, xyz t)}$$

- (c) En notant $U = \mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}$ on cherche ici $\mathbb{P}(U = 1)$ et comme $U \sim \mathcal{B}(n, xyz t)$ il vient :

$$\boxed{\text{La probabilité demandée est égale à : } nxyz t(1 - xyz t)^{n-1}}$$

4. Autrement dit : B_i : "au i ème échantillon les 4 expériences sont non toutes concluantes"

- (a) $\mathbb{1}_{B_1} + \cdots + \mathbb{1}_{B_n}$ est le nombre d'échantillons pour lesquels les quatre expériences sont non toutes concluantes

Remarque : $\overline{B_i}$: "au i ème échantillon les 4 expériences sont toutes concluantes"

- (b) On note $V = \mathbb{1}_{B_1} + \dots + \mathbb{1}_{B_n}$ et on remarque que : $P(\overline{B_i}) = (1-x)(1-y)(1-z)(1-t)$
 V suit la loi binomiale de paramètres $\left(n, 1 - (1-x)(1-y)(1-z)(1-t)\right)$ et on veut $P\left(V \leq \frac{n}{2}\right)$
donc

$$\text{La probabilité recherchée est : } \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \left(1 - (1-x)(1-y)(1-z)(1-t)\right)^k \left((1-x)(1-y)(1-z)(1-t)\right)^{n-k}$$

Partie C.

5. (a) $(Y = Z)$ est réalisée donc A est symétrique réelle ce qui entraîne que A est diagonalisable (théorème spectral)
(b) $(Y = Z) = ((Y = 0) \cap (Z = 0)) \cup ((Y = 1) \cap (Z = 1))$ réunion de deux événements disjoints
donc $P(Y = Z) = P((Y = 0) \cap (Z = 0)) + P((Y = 1) \cap (Z = 1))$
et comme Y et Z sont indépendantes il vient :

$$P(Y = Z) = (1-y)(1-z) + yz$$

6. (a) $(Y \neq Z)$ est réalisée donc $(Y, Z) = (0, 1)$ et alors A est triangulaire inférieure
ou $(Y, Z) = (1, 0)$ et alors A est triangulaire supérieure.
et le spectre d'une matrice triangulaire se lit sur la diagonale donc

$$A \text{ est triangulaire et son spectre est } \{X, T\}$$

- (b) les variables sont mutuellement indépendantes donc les événements $(X \neq T)$ et $(Y \neq Z)$ sont indépendants
et alors :

$$\begin{aligned} P(X \neq T | Y \neq Z) &= P(X \neq T) \\ &= P((X, T) = (0, 1)) + P((X, T) = (1, 0)) \\ &= (1-x)t + x(1-t) \end{aligned}$$

$$P(X \neq T | Y \neq Z) = (1-x)t + x(1-t)$$

7. On note E : " A est diagonalisable" et on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(Y = Z) \times P(E | Y = Z) + P(Y \neq Z) \times P(E | Y \neq Z) \\ &= ((1-y)(1-z) + yz) \times 1 + (y(1-z) + (1-y)z) \times P(X \neq T | Y \neq Z) \\ &= (1-y)(1-z) + yz + (y(1-z) + (1-y)z) \times ((1-x)t + x(1-t)) \end{aligned}$$

La probabilité que A soit diagonalisable vaut : $(1-y)(1-z) + yz + (y(1-z) + (1-y)z) \times ((1-x)t + x(1-t))$
ou encore :

$$(1-y)(1-z) + yz + (y+z-2yz)(x+t-2xt)$$

Un autre raisonnement :

" A non diagonalisable" est l'événement formé des matrices : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

donc la probabilité que A soit diagonalisable vaut :

$$1 - (1-x)y(1-z)(1-t) - xy(1-z)t - (1-x)(1-y)z(1-t) - x(1-y)zt$$

Partie D.

8. (a) A n'est pas inversible ($\text{rg}(A) = 1$) donc u n'est pas bijectif
(b) B n'est pas inversible ($\text{rg}(B) = 2$) donc u' est bijectif
(c) On remarque que $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de plus $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux
donc en posant $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$
et la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- (d) On remarque : $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
donc $u'(e_1) = -e_1$ et $u'(e_2) = e_2$ et ainsi :

La matrice de u' dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. (a) $u(v(e_1)) = v(u(e_1)) = v(\alpha e_1) = \alpha v(e_1)$ donc $v(e_1) \in E_\alpha(u) = \text{Vect}(e_1)$
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v(e_1) = \lambda e_1$
On montre de même qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $v(e_2) = \mu e_2$

e_1 et e_2 sont deux vecteurs propres de v

- (b) • $v^3 + v = u$ donc $v^3(e_1) + v(e_1) = u(e_1)$ et ainsi $\lambda^3 e_1 + \lambda e_1 = 0_2$ ou encore $(\lambda^3 + \lambda)e_1 = 0_2$
et comme $e_1 \neq 0_2$ on a : $\lambda^3 + \lambda = 0$

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda^3 + \lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \text{ donc } \lambda = 0$$

- de même $v^3(e_2) + v(e_2) = u(e_2)$ entraîne $\mu^3 + \mu = 2$ qui équivaut à $(\mu - 1)(\mu^2 + \mu + 2) = 0$

La seule solution réelle de cette équation est $\mu = 1$

- (c) v est donc l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

on a donc $v \circ v = v$ et $\text{Im}(v)^\perp = \ker(v)$ (En effet : $\ker(v) = \text{Vect}(e_1)$ et $\text{Im}(v) = \text{Vect}(e_2)$)
donc v est une projection orthogonale

On remarque que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \frac{1}{2} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ donc $v = \frac{1}{2}u$

- (d) En posant $v = \frac{u}{2}$, $v^3 + v = \frac{1}{8}u^3 + \frac{1}{2}u$
or $A^3 = 4A$ donc $u^3 = 4u$ et ainsi $v^3 + v = u$, v est bien solution de (E)
En conclusion :

$\frac{1}{2}u$ est l'unique solution de (E)

PROBLÈME II

Partie A.

1. Remarque : $e_k(x) = \frac{k}{x^{k+1}}$

- (a) e_k est une fonction usuelle dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et $e'_k(x) = -\frac{k(k+1)}{x^{k+2}}$

- (b) • (Partie non nécessaire mais sûrement attendue)

e_k est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ donc (théorème de la bijection)

$$e_k(]0; +\infty[) =]\lim_{+\infty} e_k; \lim_0 e_k[\quad (=]0; +\infty[)$$

et e_k est une bijection de $]0; +\infty[$ dans $]0; +\infty[$.

- (Cette partie suffit pour une réponse rigoureuse)

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\begin{aligned} y = e_k(x) &\iff \frac{k}{x^{k+1}} = y \\ &\iff x^{k+1} = \frac{k}{y} \\ &\iff x = \left(\frac{k}{y}\right)^{\frac{1}{k+1}} \end{aligned} \quad x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \text{ est la réciproque de } x \mapsto x^n$$

La réciproque de e_k est la fonction $x \mapsto \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{k+1}}$

- (c) $\lim_{0} e_k = +\infty$ donc la courbe de e_k admet une asymptote verticale en 0 .
 et $\lim_{+\infty} e_k = 0$ donc la courbe de e_k admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

2. (a) (*Difficile de se mettre à la place d'un candidat qui ne connaît pas la réponse*)

$$2\varphi - 1 = \sqrt{5} \quad \text{donc} \quad 4\varphi^2 - 4\varphi + 1 = 5 \text{ et ainsi :}$$

$$\boxed{\varphi \text{ est une solution de } x^2 - x - 1 = 0}$$

(b) $e_k(1) = k$ et $e'_k(1) = -k(k+1)$

donc l'équation (*réduite*) de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = -k(k+1)(x-1) + k$ ou encore :

$$\boxed{y = -k(k+1)x + k^2 + 2k}$$

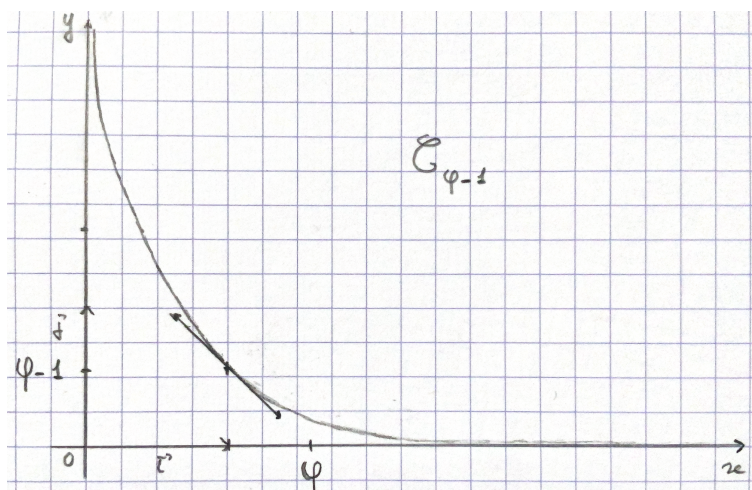
$$\text{de plus : } e'_k(1) = -1 \iff k(k+1) = 1 \iff k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{car } k > 0)$$

Le coefficient de cette tangente est égal à -1 si, et seulement si, $k = \varphi - 1$ (ou $= \frac{1}{\varphi}$)

Dans ce cas, $k^2 + 2k = \dots = \varphi$ la tangente au point d'abscisse 1 est : $y = -x + \varphi$ donc

Cette tangente passe par le point de coordonnées $(\varphi, 0)$

(c) On résume les résultats précédents sur la figure suivante :



3. Soit x, y, x', y' des éléments de I ,

$$\begin{aligned} \frac{e_k(x)}{e_k(y)} = \frac{e_k(x')}{e_k(y')} &\iff \frac{y^{k+1}}{x^{k+1}} = \frac{y'^{k+1}}{x'^{k+1}} \\ &\iff \left(\frac{y}{x}\right)^{k+1} = \left(\frac{y'}{x'}\right)^{k+1} \\ &\iff \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \quad \text{car } x \mapsto x^{k+1} \text{ est bijective de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans } \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

e_k vérifie la propriété des rapports constants

Partie B.

4. (a) La fonction n'est pas continue en 0 En effet : $\lim_{x \rightarrow 0^-} e_k(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} e_k(x)$

En revanche elle est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

(b) • La fonction f_k est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

• De plus f_k est nulle sur $] -\infty; 1[$ donc il suffit d'étudier $\int_1^{+\infty} f_k(t) dt$

Pour $A > 0$,

$$\begin{aligned}\int_1^A f_k(t) dt &= \int_1^A \frac{k}{t^{k+1}} dt \\ &= \left[-\frac{1}{x^k} \right]_1^A \\ &= 1 - \frac{1}{A^k} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1\end{aligned}$$

donc $\int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) dt$ converge et vaut 1.

En conclusion :

$$\boxed{f_k \text{ est une densité de probabilité}}$$

5. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_k(x) = \int_{-\infty}^x f_k(t) dt$ donc (avec les calculs précédents)

$$\boxed{\forall x < 1, F_k(x) = 0 \text{ et } \forall x \geq 1, F_k(x) = 1 - \frac{1}{x^k}}$$

(b) pour tout $x \geq 1$ $S_k(x) = \frac{1}{x^k}$

Soit x, y, x', y' des éléments de $[1; +\infty[$,

$$\begin{aligned}\frac{S_k(x)}{S_k(y)} = \frac{S_k(x')}{S_k(y')} &\iff \frac{y^k}{x^k} = \frac{y'^k}{x'^k} \\ &\iff \left(\frac{y}{x}\right)^k = \left(\frac{y'}{x'}\right)^k \\ &\iff \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \quad \text{car } x \mapsto x^k \text{ est bijective de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans } \mathbb{R}_+^*\end{aligned}$$

$$\boxed{S_k \text{ vérifie la propriété des rapports constants}}$$

(c) X admet une espérance si, seulement si, $\int_{-\infty}^{\infty} t f_k(t) dt$ est absolument convergente

ce qui équivaut ici à $\int_1^{\infty} \frac{k}{t^k} dt$ est convergente.

• Si $0 < k < 1$, $F : t \mapsto \frac{-k}{k-1} \frac{1}{x^{k-1}}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{k}{t^k}$ sur $[1; +\infty[$ et $\lim_{+\infty} F(t) = +\infty$

donc $\int_1^{\infty} \frac{k}{t^k} dt$ est divergente.

• Si $k = 1$, $F : t \mapsto \ln(t)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1; +\infty[$ et $\lim_{+\infty} F(t) = +\infty$

donc $\int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt$ est divergente.

• Si $1 < k$, $F : t \mapsto \frac{-k}{k-1} \frac{1}{x^{k-1}}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{k}{t^k}$ sur $[1; +\infty[$ et $\lim_{+\infty} F(t) = 0$

donc $\int_1^{\infty} \frac{k}{t^k} dt$ est convergente.

$$\boxed{X \text{ admet une espérance si, et seulement si, } k > 1}$$

Et pour $k > 1$, $E(X) = \lim_{+\infty} F(t) - F(1)$ avec $F : t \mapsto \frac{-k}{k-1} \frac{1}{x^{k-1}}$ donc

$$\boxed{E(X) = \frac{k}{k-1}}$$

6. (a) X à valeurs dans $[1; +\infty[$ donc $Y = X - 1$ à valeurs dans $[0; +\infty[$ et pour $x \geq 0$

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(X - 1 \leq x) \\ &= P(X \leq x + 1) \\ &= 1 - \frac{1}{x + 1} \end{aligned}$$

La fonction de répartition de $X - 1$ est $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 & \text{si } x < 1 \\ x \longmapsto \frac{x}{x - 1} & \text{sinon} \end{cases}$

- (b) X à valeurs dans $]1; +\infty[$ donc $Z = \frac{1}{X - 1}$ à valeurs dans $]0; +\infty[$ et pour $x > 0$

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P\left(\frac{1}{X - 1} \leq x\right) \\ &= P\left(X - 1 \geq \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 - P\left(X \leq \frac{x + 1}{x}\right) \\ &= \frac{x}{x + 1} \end{aligned}$$

donc Y et Z ont la même fonction de répartition et ainsi :

$$X - 1 \text{ et } \frac{1}{X - 1} \text{ suivent la même loi}$$

7. (a) *Remarque : $P(X \in [a, b])$ est la proportion de la population dont la richesse est entre a et b . Doit-on parler d'expérience aléatoire ?*

On cherche q tel que : $P(X > q) = \frac{1}{5}$ ce qui équivaut à : $\frac{1}{q^k} = \frac{1}{5}$ ou encore $q = 5^{\frac{1}{k}}$

- (b) $q \geq 1$ donc

$$\begin{aligned} \int_q^{+\infty} x f_k(x) dx &= \int_q^{+\infty} k \frac{dx}{x^k} \\ &= \frac{k}{k - 1} \frac{1}{q^{k-1}} \end{aligned}$$

$$\int_q^{+\infty} x f_k(x) dx = \frac{k}{k - 1} 5^{\frac{1-k}{k}}$$

$$\int_q^{+\infty} x f_k(x) dx \text{ est la part de la richesse détenue par les 20\% les plus riches}$$

- (c) Pour $k \in [1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \int_q^{+\infty} x f_k(x) dx = \frac{4}{5} E(X) &\iff \frac{k}{k - 1} 5^{\frac{1-k}{k}} = \frac{4}{5} \frac{k}{k - 1} \\ &\iff 5^{\frac{1}{k}} = 4 \\ &\iff k = \frac{\ln(5)}{\ln(4)} \end{aligned}$$

$$\text{L'équation d'inconnue } k > 1, \int_q^{+\infty} x f_k(x) dx = \frac{4}{5} E(X) \text{ admet pour unique solution } k_0 = \frac{\ln(5)}{\ln(4)}$$

- (d)

$$\text{Lorsque } k = k_0, \text{ les 20\% des plus riches possèdent 80\% de la richesse totale}$$