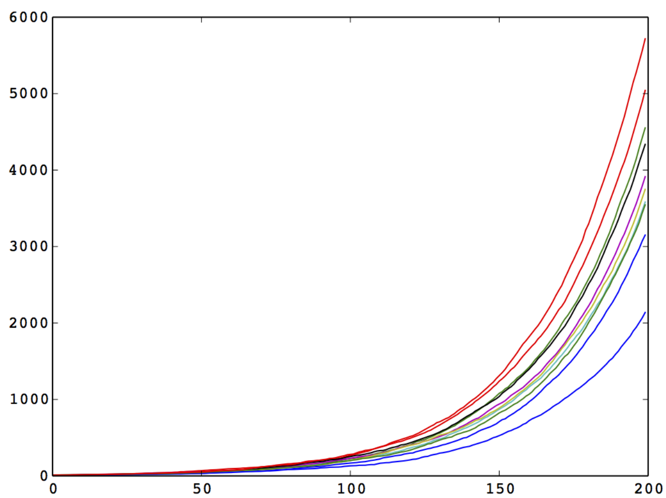
Exemple de sujet 1

Un agent biologique pathogène se déplace et multiplie dans l'air par division de chaque cellule en deux cellules identiques. Les cellules sont initialement immortelles, puis neutralisées par un agent désinfectant pulvérisé pour combattre l'infection.

On discrétise le temps en instants sucessifs séparés d'une durée δt, et on note pour tout entier naturel n :

- U_n le nombre de cellules pathogènes actives en suspension à l'instant $n\delta t$.
- X_n et Y_n le nombre de cellules actives respectivement divisées / neutralisées entre $n\delta t$ et $(n+1)\delta t$.

1. Dans un premier temps, les cellules pathogènes évoluent sans désinfectant. On note α la probabilité, pour une cellule de se diviser à un intervalle de temps quelconque δt et on suppose que les cellules n'interagissent pas.
   (a) Déterminer la loi conditionnelle de la variable X_n sachant l'événement $[U_n = k]$.
   (On reconnaîtra le schéma d'une loi usuelle)
   En déduire en fonction de k la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} i P_{[U_n=k]}([X_n = i])$.
   (b) En déduire que : $E(X_n) = \alpha E(U_n)$.
   (c) Exprimer $E(U_{n+1})$ en fonction de $E(U_n)$, puis montrer que $E(U_n) = (1+\alpha)^n N$, où N est le nombre initial de cellules.
   (d) Lors d'une expérience, on observe l'évolution du nombre de bactéries dans dix boîtes de Petri. Chacune d'elles contient au départ 10 cellules pathogènes.
   Les résultats de cette expérience sont représentés sur le graphique suivant :



   Évaluer à l'aide de ces courbes la valeur du coefficient α.

2. On introduit l'agent désinfectant de sorte que, à chaque instant, chaque cellule pathogène peut être neutralisée avec la probabilité β, et sinon elle peut se diviser avec la probabilité α précédente.
   (a) Exprimer $E(U_{n+1})$ en fonction de $E(U_n)$, puis $E(U_n)$ en fonction de n.
   (b) Déterminer une condition sur α et β pour que l'infection soit enrayée.

3. Simuler informatiquement l'évolution d'une population de cellules pathogènes comptant initialement N cellules lorsqu'on pulvérise l'agent infectant.
   On choisira des valeurs de α et β permettant de décrire les différents cas de figure possibles.

Exemple de sujet 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. On définit l'application :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & (X - X^2)P'' + (1 - 2X)P' \end{array}$$

   (a) Justifier rapidement que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Déterminer la matrice M de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Préciser les valeurs propres de ϕ. L'application ϕ est-elle diagonalisable ?

   (c) ϕ est-elle bijective ?

2. Pour tout entier $p \in [\![0, n]\!]$, on considère les polynômes :

$$T_p = X^p(1 - X)^p \qquad \text{et} \qquad L_p = \frac{1}{p!}(T_p)^{(p)},$$

   où $(T_p)^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de T_p.
   Fixons un entier $p \in \mathbb{N}$.

   (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_p.

   (b) Notons L_p sous la forme $L_p = \sum_{k=0}^{p} a_{k,p} X^k$. Établir que :

$$\forall k \in [\![0, p]\!],\ a_{k,p} = (-1)^k \binom{p}{k} \binom{p+k}{k}.$$

   (c) Déterminer une relation entre $a_{k+1,p}$ et $a_{k,p}$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$. Préciser la valeur de $a_{0,p}$.

   (d) En vous appuyant sur la question 2.(c), écrire une fonction informatique qui prend en argument un entier naturel p et renvoie les coefficients $a_{0,p}, a_{1,p}, ..., a_{p,p}$ de L_p.
   Tester cette fonction dans le cas où $p \in \{0, 1, 2\}$.

3. Dans cette question, $n = 2$ et ϕ est donc l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \mapsto & (X - X^2)P'' + (1 - 2X)P' \end{array}$$

   Vérifier que (L_0, L_1, L_2) est une base de vecteurs propres de ϕ.

Exemple de sujet 3

L'exercice comprend 3 parties. La partie 3 peut être abordée sans que la partie 2 ait été traitée.

Partie 1 : définition d'une fonction

Soit t un réel positif ou nul. Pour tout réel x, on pose : $P_t(x) = x^3 + tx^2 + 1$.

1. Démontrer que le polynôme P_t admet une unique racine réelle que l'on notera $r(t)$. On note r l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ qui, à tout réel positif t, associe le réel $r(t)$.

Partie 2 : ébauche de la courbe de la fonction r

On a construit la représentation graphique de la fonction P_2 sur la figure 1 ci-dessous.

2. Expliquer comment il est possible de construire sur cette figure le point de coordonnées $(2, r(2))$.
3. Avec le logiciel Geogebra, on a répété la construction précédente en faisant varier t de 0 à 10 avec un pas de 0.1, et on a obtenu la figure 2 ci-dessous. Que peut-on conjecturer relativement :
   (a) à $r(0)$?
   (b) au signe de $r(t)$?
   (c) à la limite de la fonction r en $+\infty$?
   (d) à la branche infinie de la courbe de r en $+\infty$?
   Démontrer ces conjectures.
4. Démontrer que la fonction r réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty, -1]$. Déterminer la fonction réciproque de la fonction r, que l'on nommera s.
5. En déduire que la fonction r est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variation de r.

Partie 3 : approche informatique

6. Rédiger une fonction informatique qui, recevant `t` et un entier `n`, renvoie une valeur approchée de $r(t)$ à 10^{-n} près.
7. Utiliser cette fonction pour construire la courbe de r. Commenter la courbe obtenue.

Figure 1

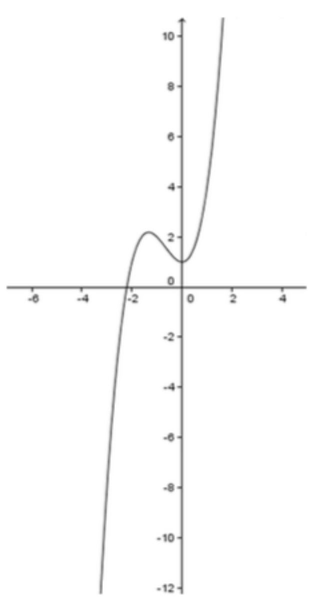
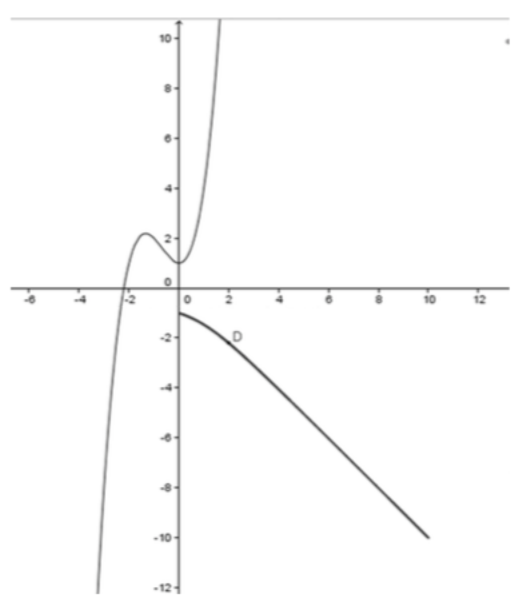


Figure 2



Exemple de sujet 4

On rappelle que si S et T sont deux variables aléatoires réelles à densité et indépendantes, alors $S+T$ est une variable à densité dont une densité est donnée, sous réserve de convergence de l'intégrale, par la formule :

$$f_{S+T}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(t) f_T(x-t)dt.$$

1. Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1[$ et soit λ un réel strictement positif. On note $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Vérifier que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
2. On note $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. On note $S_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Montrer que pour $n \geqslant 1$, S_n admet pour densité la fonction f_n donnée par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$
3. On suppose qu'à un arrêt de bus, les différences entre les temps de passage successifs d'un autobus sont indépendantes, et de même loi exponentielle de paramètre λ.
On définit un instant 0, puis on note $S_1, S_2, \ldots$, les temps de passages successifs des autobus. On note alors, pour $t > 0$, N_t la variable égale au nombre d'autobus qui sont passés entre l'instant 0 et l'instant t à l'arrêt de bus. Autrement dit, on a : $\forall n \geqslant 0,\ [N_t = n] = [S_n \leqslant t < S_{n+1}]$.
   (a) Pour $n \geqslant 0$, exprimer l'événement $[N_t \geqslant n]$ à l'aide de la variable S_n. Justifier alors que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant t).$$
   (b) En déduire que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.
4. On suppose plus précisément que les temps de passages successifs d'un autobus ont pour moyenne 10 minutes. Un individu arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ donné pour prendre le bus :
— combien de temps en moyenne va-t-il attendre le prochain bus ?
— combien de temps en moyenne s'écoule-t-il entre le prochain bus et le bus qui a précédé ?
On réalise le programme Python suivant :
```
from math import log
from random import random
def autobus()
        a = 0 ; b = 0 ; N=10000 ;
        for k in range(N):
                s=0
                while s < 100:
                        r = s
                        s = s - 10*log(random())
                        u = s-100 ; v = s-r ;
                a = a+u ; b = b+v ;
        print(a/N,b/N)
```
   (a) Expliquer ce que représentent les variables r, s, u et v, dans le programme.
   (b) Le programme affiche finalement les valeurs suivantes :
   `10.062252        20.315494`
   Pourquoi les valeurs affichées sont-elles paradoxales vis à vis de la situation ?

Exemple de sujet 5

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. À chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant.
Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage amenant une boule noire (si on obtient la boule noire), et qui vaut 0 si on n'obtient jamais de boule noire.
L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

1. (a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise `m` fois l'expérience décrite ci-dessus (en arrêtant les tirages après l'obtention de `tmax` boules blanches), et renvoie la proportion des expériences où une boule noire a été obtenue :

```
def EstimeProbaEchec (m,tmax):
    CompteSucces=0
    for i ..........:
        b=........
        succes=0
        tirages=0
        while succes==........ and tirages.........:
            tirages ..........
            if random().............:
                succes=1
            else:
                ................
        CompteSucces += ............
    return ..............................
```

   (b) Utiliser cette fonction avec plusieurs valeurs de `tmax` pour établir une conjecture en réponse au problème posé.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note B_n l'événement « Les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules blanches », et on note $u_n = P(B_n)$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}.$$

   (b) Etudier les variations de la suite (u_n), puis démontrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.

   (c) Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$:
$$0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x,$$
puis démontrer que la suite $(-\ln(u_n))$ est convergente.

   (d) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = 1 - P(B_n)$.

   Répondre alors au problème posé.

Rapport des oraux relatifs aux exemples publiés

Exemple 1

Cet exercice, partant d'un problème de modélisation, permettait de tester les bonnes connaissances du cours sur les suites usuelles, ainsi que sur la loi binomiale.

Certains candidats ont eu du mal à comprendre le modèle proposé et ont peiné à reconnaître l'emploi de la loi binomiale dans la question 1(a). Dans la mesure du possible, lorsque cela n'avait pas été fait durant la préparation, le jury cherchait à guider tout candidat vers la reconnaissance du modèle binomial.

La question 1(c) pouvait souvent être traitée même sans avoir abordé les questions précédentes, elle a constitué un premier objectif raisonnable pour les candidats de niveau modeste.

La question 1(d) n'attendait pas forcément de réponse précise, il était apprécié des candidats qu'ils puissent interpréter $E(U_{200})$ comme étant une valeur proche de 4000, et donc en déduire une estimation de α. Peu y sont parvenus.

La plupart des candidats se sont contentés de traiter la question 1 et la question 3, la question 2 leur demandant trop de temps pour généraliser le cas de la question 1.

Lorsque la question 3 n'avait pas été traitée par le candidat par manque de temps lors de sa préparation, le jury a systématiquement demandé au candidat s'il connaissait un moyen de simuler informatiquement une variable suivant une loi binomiale de paramètres donnés n et p. Cela permettait de vérifier les connaissances élémentaires en simulation dans le langage choisi par le candidat.

Exemple 2

Cet exercice d'algèbre linéaire est fort classique surtout dans sa première question.

La question 1 est un objectif minimal à atteindre en algèbre linéaire pour tout candidat admissible. Les questions, assez courantes, ont rassuré les candidats interrogés, et la plupart ont su montrer leurs capacités en algèbre linéaire élémentaire.

La question 2 devenait plus technique et a été moins appréciée par les candidats. Peu ont su aborder les questions (a), (b) et (c). La plupart a donc été bloquée pour la question d'informatique qui utilisait en partie le résultat de la question (c).

Pour la plupart des candidats qui n'avait pas résolu la question (c), le jury pouvait par exemple proposer une relation de récurrence fictive entre $a_{k+1,p}$ et $a_{k,p}$ (par exemple $a_{k+1,p} = \frac{k}{p+1} a_{k,p}$) et demander au candidat d'écrire sans préparation une boucle informatique qui permettrait de calculer les $a_{k,p}$ à l'aide de cette formule. Cela permettait de voir le bon emploi d'une boucle, ainsi que sur la gestion des indices utilisés.

La question 3 pouvait être traitée sans la question 2, ce qui a poussé de nombreux candidats à l'aborder, ou du moins à expliquer comment procéder pour sa résolution.

Exemple 3

Cet exercice d'analyse a dans l'ensemble été plutôt bien réussi par les candidats, lorsqu'ils avaient compris ce qu'on attendait d'eux.

La question 1 a été abordée par tous les candidats. Quelques candidats maladroits ont étudié une fonction de t au lieu d'une fonction de x.

La question 2 a été souvent mal comprise par les candidats, et on a vu de nombreux candidats pointer sur la figure 1 le point de coordonnées $(0, 2)$ ou bien $(-2, 0)$, alors que le point était représenté (sans le dire) sur la figure 2.

La question 3, à l'inverse, a souvent été mieux traitée. La plus grande difficulté rencontrée était pour les candidats de comprendre la différence entre les éventuelles conjectures qu'ils pouvaient émettre, et les résultats qu'ils démontraient réellement.

Lorsque les candidats n'étaient pas arrivés jusqu'à la question 6, il était fréquemment demandé aux candidats une méthode pour approcher la solution d'une équation $f(x) = 0$, par exemple pour la fonction f_2 qui est représentée sur la figure 1.

Exemple 4

Cet exercice de probabilités continues tentait de faire apparaître le « paradoxe de l'autobus », après avoir étudié en détail des variables de lois exponentielles et utilisé le produit de convolution.

La question 1 a été bien traitée par la plupart des candidats.

La question 2 est un exemple très classique d'utilisation du produit de convolution. Si la plupart des candidats a bien compris qu'il fallait ici utiliser un raisonnement par récurrence, la convolution des fonctions f_n et f_1 a été plus difficile à mettre en place, notamment la détermination des bornes d'intégration dans les différents cas. La principale difficulté venait du fait que certains candidats manquent de rigueur, et ne comprennent pas que les fonctions f_n peuvent être nulles sur une partie du domaine d'intégration.

La question 3 a été moins abordée par les candidats, sûrement par manque de temps. Les quelques candidats qui ont pu réfléchir sur la question ont montré de bons raisonnements.

Les candidats ont tous été interrogés sur le programme de l'exercice 4, et on attendait des candidats qu'ils comprennent les variables utilisées, et leur interprétation dans le contexte donné des passages des autobus.

Exemple 5

Cet exercice de probabilités discrètes a été dans l'ensemble bien traité par les candidats, qui ont reconnu des raisonnements assez classiques au moins sur le début de l'exercice et ont pu assez aisément avancer dans les questions.

La question 1 a été abordée par la plupart des candidats, et nombreux sont ceux qui ont compris comment compléter l'algorithme correctement.

La question 2(a) a été traitée par tous les candidats, mais trop souvent de façon peu rigoureuse. Ainsi, de nombreux candidats évitent soigneusement de parler d'événements dans leur calcul de $P(B_n)$ et simplement multiplient des probabilités en les « expliquant », au lieu de raisonner à l'aide de la formule des probabilités composées.

La question 2(b) a été bien traitée par une large majorité de candidats.

La plupart des candidats a compris comment démontrer la double inégalité de la question 2(c) en étudiant une fonction. Le reste de la question a souvent été plus déroutant pour les candidats, qui n'ont pas forcément vu comment faire le lien avec les inégalités qu'ils venaient de démontrer.

Peu de candidats ont traité la fin de l'exercice, sûrement par manque de temps.