Exemple de sujet 1

On pourra utiliser pour les programmes `Python` *la fonction* `linalg.matrix_rank()` *du module* `numpy`*, qui permet de déterminer le rang d'une famille de vecteurs.*

Exemple d'utilisation de cette fonction :

```
import numpy as np
V = np.array( [ [1,2,1] , [2,3,2]] )
print( np.linalg.matrix_rank(V) )
```

Python renvoie alors la valeur : 2.

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice A.

1. (a) Écrire une fonction Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'ils sont colinéaires.
   On pourra représenter les vecteurs par des listes.

   (b) Écrire une fonction Python prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'il est un vecteur propre de A.

2. (a) Vérifier que les vecteurs $(1, -2, 0)$, $(0, 1, -1)$ et $(1, 0, -1)$ sont des vecteurs propres de f et préciser pour chacun la valeur propre associée.

   (b) l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. (a) Écrire un programme Python permettant de déterminer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre -10 et 10 (bornes incluses).

   (b) Pour N un entier naturel non nul, calculer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre $-N$ et N (bornes incluses).

4. Soit N un entier naturel non nul, une expérience consiste à choisir au hasard de manière indépendante N vecteurs à coefficients entiers dans $[\![-N; N]\!]^3$.

   (a) Quelle est la probabilité p_N d'obtenir au moins un vecteur propre de A parmi ces N vecteurs ?

   (b) Quelle est la limite de $N \ln\left(1 - \dfrac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)$ lorsque N tend vers $+\infty$?
   En déduire la limite de p_N quand N vers $+\infty$.

Exemple de sujet 2

Soit t un réel positif ou nul. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$P_t(x) = x^3 + tx - 1.$$

1. Montrer que le polynôme P_t admet une unique racine réelle $u(t)$.
2. On note u l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ qui, à tout réel positif t associe $u(t)$.
   (a) Montrer que $u(\mathbb{R}^+) \subset]0,1]$.
   (b) Démontrer que la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$.
   Indication : utiliser l'expression de $P_t(u(t))$.
   (d) Montrer que l'application u est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $]0,1]$, de réciproque :
   $$v: \begin{array}{ccc}]0,1] & \to & \mathbb{R}^+ \\ y & \mapsto & \dfrac{1-y^3}{y}. \end{array}$$
   (e) Représenter graphiquement grâce au langage `Python` la fonction v sur $]0,1]$.
   En déduire le tracé de représentation graphique de la fonction u.
   (f) Justifier que la fonction u est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   (g) Démontrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ puis déterminer une expression de $u'(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}^+$ et $u(t)$.

Exemple de sujet 3

On définit la fonction numérique f sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Proposer une fonction Python prenant en argument un réel $x > 0$ et retournant une approximation de $f(x)$.
   (b) Proposer une approximation du graphe de la fonction f à l'aide de l'outil informatique.
   Conjecturer un résultat sur la monotonie de la fonction f et sur les limites au bord de son domaine de définition.
2. Soient x et x' dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < x'$. Déterminer le signe de $f(x) - f(x')$. En déduire que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Justifier que f admet une limite finie en $+\infty$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de cette limite à ce stade de l'exercice.*
4. Dans cette question, on cherche à justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.
   (a) Montrer que $\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[, |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}$.
   (b) En déduire que f est continue en x_0.
5. Montrer qu'il existe un réel A tel que pour tout réel x strictement positif : $\frac{A}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{A}{x}$.
   Ce résultat est-il cohérent avec le graphe de f ? En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.
6. Le but de cette question est de déterminer un équivalent simple de f en 0.
   (a) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t) - 1}{x+t}\mathrm{d}t$.
   En admettant l'inégalité suivante : $\forall t \in [0,1], |\cos(t) - 1| \leqslant \frac{t^2}{2}$, établir que g est une fonction bornée.
   (b) En déduire un équivalent simple de f en 0.

Exemple de sujet 4

Un joueur dispose de N dés équilibrés à 6 faces. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de 6 obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de 6 obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$. S'il ne reste plus de dés au m-ème lancer, on a alors, pour tout $k \geqslant m$, $X_k = 0$.
Pour tout entier naturel non nul n, on définit la variable $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, qui correspond alors au nombre de 6 obtenus après n lancers.

1. Écrire une fonction Python `X(N)` qui prend en argument le nombre de dés N et renvoie la valeur de X_1.
2. En déduire une fonction Python `S(N,n)` qui prend en arguments les nombre de dés N et n le nombre de lancers effectués et renvoie la valeur de S_n.
3. On se propose de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n et on cherchera à déterminer p_n.
   (a) **Question préliminaire :** Soient N, M et $k \in \mathbb{N}$ avec $M \leqslant k \leqslant N$. Montrer que :
   $$\binom{N}{M}\binom{N-M}{k-M} = \binom{N}{k}\binom{k}{M}.$$
   (b) Montrer que la proposition est vérifiée pour $n = 1$ et déterminer p_1.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que S_n suit une loi binomiale de paramètre N et p_n.
      i. Soient M et k deux entiers naturels tels que $M \leqslant k \leqslant N$. Déterminer $P(X_{n+1} = k-M \mid S_n = M)$.
      ii. En déduire que S_{n+1} suit une loi binomiale de paramètres N et p_{n+1} où $p_{n+1} = \dfrac{1+5p_n}{6}$.
   (d) Déterminer une expression explicite de p_n.
4. On admet qu'il est presque-sûr qu'on obtienne tous les 6 au bout d'un nombre fini de lancers, c'est-à-dire qu'il existe presque sûrement un rang $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $S_n = N$.
   On note T le nombre de lancers nécessaires pour n'avoir que des 6 (et on pose par convention $T = +\infty$ si on n'obtient jamais tous les 6, ce qui a une probabilité nulle d'arriver), c'est-à -dire
   $$T = \min(\{n \geqslant 1 \mid S_n = N\} \cup \{+\infty\}).$$
   Déterminer la fonction de répartition de T.
5. Vérifier que la variable T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci.
   On admettra le résultat suivant : T admet une espérance si la série $\sum P(T > n)$ est convergente et dans ce cas $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n)$.

Exemple de sujet 5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E associé, défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3.$$

1. Écrire en `Python` une fonction `f_a(x, y, z, a)` qui renvoie les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $f_a(u)$, le vecteur u étant de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.
   (b) Montrer que $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$.
3. Écrire la matrice A de f_a relativement à la base $\mathcal{B}$ et calculer A^2. En déduire $f_a \circ f_a$.
4. On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$.
   (a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice A' de f_a dans cette base.
   (c) En déduire que 0 est la seule valeur propre de A.
   La matrice A est-elle inversible ? diagonalisable ?
5. Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI_3$, où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que la matrice $B(x)$ est inversible pour tout x non nul.
   (b) Exprimer $(A - xI_3)(A + xI_3)$ puis $(B(x))^{-1}$ en fonction de x, I_3 et A.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $(B(x))^n$ en fonction de x, n, I_3 et A.

Exemple de sujet 6

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $u_1 \in]0;\pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$: $0 < u_n < \dfrac{\pi}{2}$.
2. Déterminer le seul réel vers lequel la suite (u_n) peut converger.
3. Représenter graphiquement u_n en fonction de n pour plusieurs valeurs de u_1, puis émettre une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n).
4. Montrer que s'il existe un entier $n_0 \geqslant 4$ tel que $u_{n_0} \leqslant u_{n_0-1}$, alors la suite décroît à partir du rang n_0.
   On pourra pour cela, utiliser une expression de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *en fonction de* u_n *et* u_{n-1}.
5. Est-il possible que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n > u_{n-1}$?
6. Conclure en établissant la convergence de (u_n).
7. Émettre une conjecture sur la limite de : $\sqrt{n} \times u_n$.
8. En posant pour $n \geqslant 1$, $x_n = \dfrac{u_n}{n}$,

   montrer que : $(x_{n+1} - x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{n^2}{6}x_n^3$, puis que $\left(\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{3}$.
9. En admettant que le résultat précédent permet d'établir la relation suivante : $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{3}$,

   vérifier la conjecture faite à la question 7.

Exemple de sujet 7

Soit $\varepsilon \geqslant 0$. On dit que (X,Y), un couple de variables aléatoires, est un couple ε-différentiel si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$e^{-\varepsilon}P(X\in I)\leqslant P(Y\in I)\leqslant e^{\varepsilon}P(X\in I)$$

Intuitivement, les lois de X et Y seront d'autant plus proches que le plus petit ε tel que (X,Y) soit un couple ε-différentiel est proche de 0.

1. Soient X et Y deux variables à densité, de densités respectives f et g, et de fonctions de répartition F et G.
   (a) On suppose que pour tout $t\in\mathbb{R}$: $e^{-\varepsilon}f(t)\leqslant g(t)\leqslant e^{\varepsilon}f(t)$.
   Montrer que (X,Y) est ε-différentiel.
   (b) On suppose que (X,Y) est ε-différentiel. Soit $h>0$ et $t\in\mathbb{R}$ où f et g sont continues.

   Montrer que:
   $$e^{-\varepsilon}(F(t+h)-F(t))\leqslant G(t+h)-G(t)\leqslant e^{\varepsilon}(F(t+h)-F(t))$$
   En conclure que: $e^{-\varepsilon}f(t)\leqslant g(t)\leqslant e^{\varepsilon}f(t)$.

2. *Un exemple: les lois de Laplace $\mathcal{L}(a,b)$.*
   On définit, pour $a\in\mathbb{R}$ et $b>0$, la fonction $f_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $t\in\mathbb{R}$:
   $$f_{a,b}(t)=\frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|t-a|}{b}\right).$$
   (a) Montrer que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.
   (b) Établir que si X suit $\mathcal{L}(a,b)$, c'est-à-dire que $f_{a,b}$ est une densité de X, alors $E(X)=a$.
   (c) Montrer que si X suit la loi $\mathcal{L}(a,b)$ et Y la loi $\mathcal{L}(a',b)$, alors (X,Y) est $\dfrac{|a-a'|}{b}$-différentiel.

3. *Simulation informatique d'une loi de Laplace*
   (a) On suppose que V suit la loi exponentielle de paramètre 1, U la loi uniforme discrète sur $\{-1,1\}$ et qu'elles sont indépendantes. Montrer que $a+bUV$ suit la loi $\mathcal{L}(a,b)$.
   (b) En déduire une fonction Python `Laplace(a,b)` qui renvoie une valeur aléatoire distribuée suivant la loi $\mathcal{L}(a,b)$.

Exemple de sujet 8

Soit N un entier supérieur ou égal à 3.
Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, une par une et sans remise, les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Dans le cas où $N = 10$, simuler informatiquement une expérience et afficher les valeurs prises par X_1 et X_2.
   On rappelle à cet effet que la fonction `random()` de la bibliothèque Python `random` renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1.
2. Soient i et j deux entiers de l'intervalle $[\![1, N]\!]$. Montrer que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N, \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant N. \end{cases}$$

3. (a) Justifier que les lois de X_1 et X_2 sont données par :

$$\forall k \in [\![1, N-1]\!]\,, \quad P(X_1 = k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2, N]\!]\,, \quad P(X_2 = k) = \frac{2(k-1)}{N(N-1)}.$$

   (b) Ces variables sont-elles indépendantes ?
4. Démontrer que la variable $N + 1 - X_2$ a même loi que X_1.
5. On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, N]\!]$ et on désigne par D l'événement : « A ne prend pas la même valeur que B ».

   (a) Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $\dfrac{N-1}{N}$.

   (b) On définit les variables aléatoires $Y_1 = \min(A, B)$ et $Y_2 = \max(A, B)$.
   Calculer, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, N]\!]$ la probabilité conditionnelle :

$$P_D((Y_1 = i) \cap (Y_2 = j)).$$

   (c) Expliquer pourquoi le programme suivant permet de simuler des variables aléatoires qui suivent les mêmes lois que X_1 et X_2 dans le cas où $N = 10$:

```
from random import *
a=randint(1,10)
b=randint(1,10)
while a==b :
    b=randint(1,10)
print(min(a,b))
print(max(a,b))
```

Exemple de sujet 9

Soit $x \in [-1,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n(x) = \int_0^x t^{2n} dt; \quad J_n(x) = \int_0^x \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} dt; \quad J(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

1. Déterminer $J(x)$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $I_k(x)$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n(x)$ est bien définie puis que :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

4. Écrire une fonction en Python nommée `Jn` qui prend en argument un réel $x \in [-1,1]$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ et retourne la valeur de $J_n(x)$.
5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1], \quad |J(x) - J_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

6. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n(x)$.
7. À l'aide de Python, proposer une fonction nommée `J` qui prend comme argument un réel $x \in [-1,1]$ et retourne la valeur de $J(x)$ à 10^{-4} près, sans utiliser de fonction `atan` prédéfinie dans une bibliothèque.
8. Le résultat reste-t-il vrai lorsque $x \notin [-1,1]$?

Exemple de sujet 10

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par la donnée de ses trois premiers termes réels u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2}).$$

On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Écrire une fonction en Python prenant en argument les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et renvoyant la liste de ses 100 premiers termes. Utiliser cette fonction pour étudier le comportement asymptotique de la suite sur quelques exemples.
2. Démontrer que 0 n'est pas valeur propre de A.
3. Démontrer que, pour tout nombre complexe λ, λ est valeur propre de A si et seulement si λ est solution de l'équation : $x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.
4. Démontrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, un nombre complexe z de module strictement plus petit que 1, tels que : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z} \end{pmatrix} P^{-1}$.
5. Pour tout entier naturel n, exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n, et en déduire une expression de X_n en fonction de n, A et X_0.
6. Démontrer alors qu'il existe trois nombres complexes a, b et c (que l'on ne demande pas d'expliciter) tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + bz^n + c\overline{z}^n.$$
7. Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} |bz^n + c\overline{z}^n| = 0$.
Que peut-on dire alors de $\lim\limits_{n\to+\infty} Re(bz^n + c\overline{z}^n)$ et de $\lim\limits_{n\to+\infty} Im(bz^n + c\overline{z}^n)$?
8. En déduire que $a \in \mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Exemple de sujet 11

On rappelle que, si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes admettant respectivement des densités f_U et f_V, alors $U+V$ admet pour densité la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t) dt.$$

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Dans cette question, on note : $Z = X_1 + X_2$.
   (a) Déterminer à l'aide de Python une valeur approchée de $P(Z \leqslant 1)$.
   (b) Montrer que : $P(X_1 \leqslant X_2) + P(X_2 \leqslant X_1) = 1$.
   (c) Montrer que : $P(X_1 \leqslant X_2) = P(X_2 \leqslant X_1)$.
   (d) Montrer que : $1 - X_2$ et X_2 ont même loi.
   En déduire la valeur exacte de $P(Z \leqslant 1)$.
   (e) Après avoir représenté l'ensemble $[0,1] \times [0,1]$, interpréter géométriquement la probabilité précédente.
2. Dans cette question, on considère $T = X_1^2 + X_2^2$ et on note f_T une densité de T.
   (a) Montrer que la variable aléatoire X_1^2 est à densité, et en déterminer une densité.
   (b) Déterminer $T(\Omega)$, et déterminer une expression de $f_T(x)$ pour $x \in]0,1]$.
   On laissera le résultat sous forme d'une intégrale.
   (c) Soit $x \in]0,1]$. On note $I_x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}} dt$, dont on admet la convergence.
   Montrer que :
   $$\forall x \in]0,1], \ I_x = I_1.$$
   (d) Exprimer $P(T \leqslant 1)$ en fonction de I_1. En déduire à l'aide de Python une valeur approchée de I_1.

Exemple de sujet 12

1. Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels non nuls.

   Écrire une fonction `Python` qui renvoie `True` si $a_i^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2} \geqslant 2$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et qui renvoie `False` sinon.

   La fonction aura pour seul paramètre une liste contenant les réels $a_1, \dots, a_n$.

2. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{v} = \sqrt{2}(0,1,0)$, $\overrightarrow{w} = \sqrt{2}(0,0,1)$ et $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ admettant pour équation dans la base canonique :
$$y - z = 0.$$
   Déterminer les projetés orthogonaux des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sur le plan $\mathcal{P}$ et vérifier qu'ils ont même norme.

3. Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et a_1, a_2, a_3 trois réels tous non nuls.

   On suppose qu'il existe un plan $\mathcal{P}$ tel que les projetés orthogonaux des vecteurs $a_1\overrightarrow{e_1}$, $a_2\overrightarrow{e_2}$ et $a_3\overrightarrow{e_3}$ sur ce plan aient tous la même norme que l'on notera d.

   On considère $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2})$ une base orthonormée de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_3}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ de norme 1.

   On note p la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$.

   (a) Donner une expression de $p(\overrightarrow{e_i})$ pour $i \in \{1,2,3\}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_2}$.

   (b) Montrer que pour tout $i \in \{1,2,3\}$, on a :
$$\langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{\varepsilon_1} \rangle^2 + \langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{\varepsilon_2} \rangle^2 = \left(\frac{d}{a_i} \right)^2.$$

   (c) Montrer que :
$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2} = \frac{2}{d^2}.$$

   (d) Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, montrer que $|a_i| \geqslant d$ puis que :
$$a_i^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{a_k^2} \geqslant 2.$$