Correction du sujet 1 des exemples 2024

Question de cours :

Etant donné $f : P \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

les fonctions partielles de f en $(x_0, y_0) \in P$ sont les fonctions $y \longmapsto f(x_0, y)$ et $x \longmapsto f(x, y_0)$.

– –

Exercice préparé :

1. U est à valeurs dans $]0,1[$ donc $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ est à valeurs dans $]0;+\infty[$ et

   pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} P(X \leqslant x) &= P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right) \\ &= P\left(\ln(1-U) \geqslant -\lambda x\right) \\ &= P\left(1-U \geqslant e^{-\lambda x}\right) \\ &= P\left(U \leqslant 1-e^{-\lambda x}\right) \\ &= 1-e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

   On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ. $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)}$

2.
```
def simul_X(lbd):
    u = rd.random()
    return -1/lbd*m.log(1-u)          On utilise la propriété démontrée en 1)
```

3. (a) • Pour $n = 1$, on a $f_1 : t \longmapsto \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ qui est bien une densité *(lois usuelles)*.

   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f_n est une densité.

   f_{n+1} est à valeurs positives ou nulles et est continue sur $\mathbb{R}$ (sauf peut-être en 0),

   il suffit d'étudier $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$ ou encore $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$

   pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t &= \frac{\lambda^n}{n!}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,.\,t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda^n}{n!}\left(\Big[-e^{-\lambda t}\,.\,t^n\Big]_0^x - \int_0^x -e^{-\lambda t}\,.\,nt^{n-1}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{(\lambda x)^n}{n!}\,e^{-\lambda x} + \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \quad + \quad 1 \qquad \textit{(car } f_n \textit{ est une densité)} \end{aligned}$$

   ce qui achève la récurrence (on prépare l'oral, inutile de tout écrire au tableau).

   (b) • Pour $n = 1$, $f_1 : t \longmapsto \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ et $X_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$

   donc f_1 est bien une densité de X_1

   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f_n est une densité de S_n.

   $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et ces deux variables sont indépendantes *(lemme de coalition)* donc de densité :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)f_1(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \times \lambda e^{-\lambda(x-t)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n-1}\mathbb{1}_{0\leqslant t\leqslant x}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t\ .\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\ \frac{x^n}{n}\ .\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \\ &= f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

   ce qui achève la récurrence (on prépare l'oral, inutile de tout écrire au tableau).

4. (a) *(Je ne perds pas de temps à comprendre "avec soin")*

$$[N_t \geqslant n] = \bigcup_{k=n}^{+\infty} [N_t = k] = \bigcup_{k=n}^{+\infty} [S_k \leqslant t < S_{k+1}] = [S_n \leqslant t]$$

car (S_n) est croissante.

(b) $P(N_t = n) = P(N_t \geqslant n) - P(N_t \geqslant n+1)$ *(En effet : $(N_t \geqslant n) = (N_t \geqslant n+1) \cup (N_t = n)$ (disjointe))*
donc avec le résultat précédent :

$$P(N_t = n) = P(S_n \leqslant t) - P(S_{n+1} \leqslant t)$$

(c) En reprenant le calcul de la question 3. (a) on obtient la relation :
Pour $x > 0$, $\displaystyle\int_0^t f_{n+1}(\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,e^{-\lambda t} + \int_0^t f_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta$
donc $\forall n \geqslant 0, P\left(N_t = n\right) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}\,e^{-\lambda t}$ $\boxed{N_t \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda t}$

5. On suppose plus précisément que les horaires de passages successifs d'un bus sont, en moyenne, de 10 minutes. Un individu arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ min pour prendre le bus.

(a) A la fin de la boucle while :
`r` représente l'horaire de passage du bus avant l'arrivée de l'individu.
`s` représente l'horaire de passage du bus juste après l'arrivée de l'individu.
`u` représente le temps d'attente de l'individu
`v` représente le temps séparant les deux bus encadrant l'arrivée de l'individu.

(b) Le programme affiche les valeurs suivantes : 10.062252 20.315494.
Elles correspondent respectivement au temps d'attente moyen de l'individu et à la durée moyenne entre les deux bus.
Sachant que la durée entre deux bus suit une loi d'espérance 10 minutes on pourrait penser qu'entre les deux bus la moyenne serait de 10 mn. mais non elle est de deux fois cette valeur et le temps d'attente qu'on pourrait penser inférieur à 10 mn est lui égal à 10 mn.
(On peut ouvrir une discussion tentant d'expliquer ces résultats)

– –

Exercice non préparé :

1.
```
def test_H(L):
    n = len(L)
    liste = [ k for k in range(n) ]
    for t in L:
        if t not in liste:
            return False
    return True
```

2. Dans la fonction suivante on sait que la liste vérifie $\mathcal{H}$, il suffit de vérifier que les entiers de 0 à $n-1$ sont tous là. *(Raisonnement par double inclusion)*

```
def test_H_prime(L):
    n = len(L)
    for k in range(n):
        if k not in L:
            return False
    return True
```

Les meilleurs candidats ont surement eu d'autres questions, vous devrez juste faire au mieux avec vos qualités.

Correction du sujet 2 des exemples 2024

Question de cours :

(Allons au plus simple, on donne une caractérisation)

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, $0_E \in F$ et $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(u,v) \in F^2,\ \alpha u+\beta v \in F$

Remarque : la définition est :
Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dire qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E signifie que $(F,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

– –

Exercice préparé :

(Bien prendre le temps de bien comprendre les questions pendant la préparation, quitte à faire moins de questions)

1. En prenant (u_n) la suite constante égale à 1 et $f : x \mapsto x - \dfrac{1}{2}$.

   • D'une part : $u_n f(nx) = 1 \times (nx - \dfrac{1}{2}) = nx - \dfrac{1}{2}$.

   • D'autre part : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(x+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right) = nx + \frac{n(n-1)}{2n} - \frac{n}{2} = nx - \frac{1}{2}$

   Donc $\boxed{\text{la suite constante égale à 1 est adaptée à la fonction } x \mapsto x - \dfrac{1}{2}}$

2. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n f(nx) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right)$

   En dérivant les deux membres par rapport à x *(ce qui est possible car on a supposé f dérivable)* on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad n u_n f'(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(x+\frac{k}{n}\right)$$

   et donc $\boxed{\text{la suite } (nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est adaptée à la fonction } f'}$

3. (a) La valeur de cette somme est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}$, d'où la fonction suivante :

```
def integrale(L):
    n = len(L)
    s = 0
    for k in range(n):
        s += L[k]/(k+1)
    return s
```

   (b) $B_1' = B_0$ donc $B_1 : x \longmapsto x + c$ avec c une constante et comme $\displaystyle\int_0^1 B_1(t)\mathrm{d}t = 0$ on obtient $c = -\dfrac{1}{2}$

   donc $\boxed{B_1 = X - \dfrac{1}{2}}$

   $B_2' = 2B_1 = 2X - 1$ donc $B_2 : x \longmapsto x^2 - x + c$ avec c une constante et comme $\displaystyle\int_0^1 B_2(t)\mathrm{d}t = 0$ on obtient $c = \dfrac{1}{6}$ donc $\boxed{B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}}$

   Calculer B_1 et B_2 et vérifier que B_0 et B_1 appartiennent à E.

   (c) Un récurrence simple sur l'entier p permet de montrer que :

   $\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N},\ B_p \text{ est unitaire et de degré } p.}$

(d) i. On suppose que B_p appartient à E, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n B_p(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)$

On dérive p fois membre à membre cette égalité polynomiale pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad p!.u_n n^p B_0(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} p!.B_0\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

et comme $B_0 = 1$ il vient $n^p u_n = n$ ce qui donne bien $u_n = \frac{1}{n^{p-1}}$,

alors $\boxed{\text{la suite } \left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)_{n \in N^*} \text{ est adaptée à } B_p}$

ii. La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{n^{p-2}} B_p'(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_p'\left(x + \frac{k}{n}\right) = p\left(\frac{1}{n^{p-2}} B_{p-1}(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_{p-1}\left(x + \frac{k}{n}\right)\right)$$

or d'après i. $\left(\frac{1}{n^{p-2}}\right)_{n \in N^*}$ est adaptée à B_{p-1} et ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = 0$

iii.

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/n} \varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n^p} \int_0^{1/n} nB_p(nx)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1/n} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n^p} \int_0^1 B_p(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} B_p(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n^p} \int_0^1 B_p(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 B_p(t)\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

iv. Les deux questions précédentes montrent que φ est nulle.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)$ donc $B_p \in E$

On a donc montrer dans (d) que pour tout $p \geqslant 1$, si $B_{p-1} \in E$ alors $B_p \in E$ et comme $B_0 \in E$ on peut conclure : $\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N},\ B_p \in E}$

– –

Exercice non préparé :

1.
```
def verif(L, a, b):
    for t in L:
        if not (a<= t <= b):
            return False
    return True
```

2. Ici on suppose que la liste L passée en argument contient des entiers entre a et b.

```
def denombre(L, a, b):
    Nb_Occ = [ 0 for k in range(a, b+1) ]
    for t in L:
        Nb_Occ[t-a]
    return Nb_Occ
```

Correction du sujet 3 des exemples 2024

Question de cours :
On appelle densité de probabilité une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou nulles, dont l'intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1 .

– –

Exercice préparé : *(Remarque : Exercice très proche du sujet G2E 2024)*

1.
```
def ps(u, v):
    s = 0
    for k in range(len(u)):
        s += u[k]*v[k]
    return s

import numpy as np

def Gram(L):
    p = len(L)
    G = []
    for i in range(p):
        ligne = []
        for j in range(p):
            ligne.append(ps(L[i], L[j]))
        G.append(ligne)
    return np.array(G)

u1,u2,u3 = [1, -1, 0], [1, 0, -1], [1, 1, 1]
print(Gram([u1, u2, u3]))
```

2. La matrice de Gram d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral.

3. (a) On suppose que G est inversible.

$$GX = \begin{pmatrix} \alpha_1 \langle u_1, u_1\rangle + \alpha_2 \langle u_1, u_2\rangle + \ldots + \alpha_p \langle u_1, u_p\rangle \\ \alpha_1 \langle u_2, u_1\rangle + \alpha_2 \langle u_2, u_2\rangle + \ldots + \alpha_p \langle u_2, u_p\rangle \\ \vdots \\ \alpha_1 \langle u_p, u_1\rangle + \alpha_2 \langle u_p, u_2\rangle + \ldots + \alpha_p \langle u_p, u_p\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle u_1, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \right\rangle \\ \left\langle u_2, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle u_p, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, 0\rangle \\ \langle u_2, 0\rangle \\ \vdots \\ \langle u_p, 0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or G est inversible donc son noyau est réduit au vecteur nul, ainsi tous les coefficients α_k sont nuls et la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.

(b) i. Si $GX = 0$, alors, d'après le calcul précédent, pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$, on a bien $\boxed{\left\langle u_i, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \right\rangle = 0}$

ii. Alors $\left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left\langle u_i, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \right\rangle = 0$ (par linéarité à gauche du produit 3 scalaire), donc $\left\| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\| = 0$ et ainsi le vecteur $\boxed{\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \text{ est nul}}$.

iii. Or la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre donc tous les coefficients α_k sont nuls, c'est-à-dire $X = 0$. Ainsi le noyau de G est réduit au vecteur nul et la matrice $\boxed{G \text{ est inversible}}$.

G est inversible si, et seulement si, $ker(G) = \{0\}$

4. (a) Soient a et $b \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\|a - b\|^2 = \langle a - b, a - b\rangle = \langle a, a\rangle - 2\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle \quad \text{(bilinéarité et symétrie)}$$

(b) Soit $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j$, on a $\|v_i - v_j\|^2 = \|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - 2\langle v_i, v_j\rangle$, c'est-à-dire $1 = 1 + 1 - 2\langle v_i, v_j\rangle$ donc $\langle v_i, v_j\rangle = \dfrac{1}{2}$.

Les termes diagonaux de la matrice G valent 1 , les autres termes $\dfrac{1}{2}$.

(c) Par produit matriciel, A^2 est la matrice dont les termes diagonaux valent $n+3$, les autres termes $n+2$. On peut alors vérifier directement que $A^2 = (n+2)A - (n+1)I_n$ (ou on peut poser $A^2 = \alpha A + \beta I_n$ et déterminer les valeurs de α et β si nécessaire). Cette relation nous permet d'écrire :

$$A\left(-\frac{1}{n+1}A + \frac{n+2}{n+1}I_n\right) = I_n$$

Ainsi A possède un inverse à droite donc est inversible, d'inverse $-\dfrac{1}{n+1}A + \dfrac{n+2}{n+1}I_n$.

(d) La matrice $2G$ est inversible donc G l'est également. D'après le résultat de la question 3 , la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre, elle est de cardinal $n = \dim(\mathbb{R}^n)$ donc elle est une base de $\mathbb{R}^n$.

– –

Exercice non préparé :

```
import random as rd

def marche(i,N):
    pos = i
    for k in range(N):
        pos += rd.choice([1,-1])
    return pos

def jeu(n,a,b,i):
    pos = i
    while pos != 0 and pos != n:
        pos = marche(pos,1)
    if pos == 0:
        return a
    return b
```

Correction du sujet 4 des exemples 2024

Question de cours :
Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur le segment $[a,b]$ alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

– –

Exercice préparé :

1. *(Bien faire cette question pendant la préparation).*

```
def simul_XY(n):
    Nb_Occ = [0, 0, 0]
    for k in range(n):
        u = rd.randrange(3)
        Nb_Occ[u] += 1
    x = Nb_Occ[0]
    y = 0
    for i in Nb_Occ:
        if i==0:
            y += 1
    return x, y
```

2. *(Loi des grands nombres : la fréquence de réalisation donne une valeur approchée des espérances)*

```
N = 10000
SX, SY, SXY = 0, 0, 0
for k in range(N):
    x, y = simul_XY(10)
    SX += x
    SY += y
    SXY += x*y
print(SX/N, SY/N, SXY/N)
print(SXY/N - SX/N * SY/N)
```

Le programme affiche une valeur proche de 0, on peut faire $\boxed{\text{la conjecture que } \mathrm{cov}(X,Y)=0}$.

3. Plusieurs approches possibles, par exemple :

On utilise le modèle : $\Omega = \{1,2,3\}^2$ et P uniforme. ($\mathrm{card}(\Omega) = 3^2 = 9$)

Le couple (i,j) correspond au résultat :

la boule 1 dans le tiroir i et la boule 2 dans le tiroir j.

$X(\Omega) = \{0,1,2\}$ et $Y(\Omega) = \{1,2\}$

$X \backslash Y$	1	2	
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

On obtient $E(X) = \frac{2}{3}$, $E(Y) = \frac{4}{3}$ et $E(XY) = \frac{8}{9}$, ce qui entraine $\boxed{\mathrm{cov}(X,Y)=0}$

Remarque : X et Y ne sont pas indépendantes.

4. (a) On est dans la situation classique appelée schéma de Bernoulli : X compte le nombre de succès : le jeton va dans l'urne 1. *(On peut détailler si nécessaire. L'expérience est constituée de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ...)* . X suit la loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{3})$, ainsi $E(X) = \frac{n}{3}$.

(b) On a $(Y_1 = 1) = (X = 0)$ et Y_1 est de Bernoulli donc $E(Y_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

La symétrie du problème permet d'affirmer que $E(Y_2) = E(Y_3) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

et la relation $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ donne *(avec la linéarité de $E(\cdot)$)* $\boxed{E(Y) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

(c) Raisonnons pour $i = 2$ *(ce serait le même raisonnement pour $i = 3$).*

On utilise le modèle : $\Omega = \{1, 2, 3\}^n$ et P uniforme. $(\text{card}(\Omega) = 3^n)$

$[X = j] \cap [Y_2 = 1]$ est le nombre de listes avec j fois 1 et aucun 3 donc $\text{card}([X = j] \cap [Y_2 = 1]) = \binom{n}{j}$

$$\boxed{\forall i \in \{2, 3\}, \forall j \in [\![0, n]\!], \quad P([X = j] \cap [Y_i = 1]) = \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n}}$$

(d) Le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned} E(XY_2) &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{1} jkP([X = j] \cap [Y_2 = k]) \\ &= \sum_{j=0}^{n} jP([X = j] \cap [Y_2 = 1]) \\ &= \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n} \\ &= n\frac{2^{n-1}}{3^n} \qquad \textit{(somme usuelle)} \end{aligned}$$

de même $\boxed{E(XY_3) = n\frac{2^{n-1}}{3^n}}$

En revanche $XY_1 = 0$ donc $\boxed{E(XY_1) = 0}$

(En effet $[X \neq 0] \subset [Y_1 = 0] \subset [XY_1 = 0]$ et $[X = 0] \subset [XY_1 = 0]$)

(e) $E(XY) = E(XY_1) + E(XY_2) + E(XY_3) = 0 + n\frac{2^{n-1}}{3^n} + n\frac{2^{n-1}}{3^n} = n\frac{2^n}{3^n}$

donc avec les résultats précédents on montre bien la conjecture : $\boxed{\text{cov}(X, Y) = 0}$

– –

Exercice non préparé : *(De l'intérêt de connaître les listes de listes)*

1.
```
def temps(coords):
    L = []                  # liste des temps
    for c in coords:        # c parcourt la liste coords
        L.append(c[3])      # c[3] est le temps du point de passage c
    return L
```

On aurait aussi pu utiliser une liste en compréhension :

```
def temps(coords):
     return [c[3] for c in coords]
```

2. On utilise la méthode classique de recherche du maximum :

```
def plus_haut(coords):
    tmp_max = coords[0]                          # premier point de passage
    for c in coords:
        if c[2] > tmp_max[2]:                    # si l'altitude du pt de passage est plus gran
            tmp_max = c                          # nouveau maximum temporaire
    return [tmp_max[0], tmp_max[1]]
```

Correction du sujet 5 des exemples 2024

Question de cours :
Soit f une fonction admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.
On appelle gradient de f en (x_0, y_0) le vecteur $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ ;\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

– –

Exercice préparé :

1. (a) • D définit bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
(En effet : Si P est un polynôme de deg $\leqslant n$ alors $D(P)$ est un polynôme de deg $\leqslant n$)
• Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$,

$$\begin{aligned} D(\alpha P + \beta Q) &= (\alpha P + \beta Q)(X+1) - (\alpha P + \beta Q)(X) \\ &= \alpha P(X+1) + \beta Q(X+1) - \alpha P(X) - \beta Q(X) \\ &= \alpha D(P) + \beta D(Q) \end{aligned}$$

$\boxed{D \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$

(b) $D(1) = 0$ et la formule du binôme donne $\boxed{D\left(X^k\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i}$ pour tout entier naturel k de $[\![1, n]\!]$.

(c) Le résultat précédent donne la matrice de D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & 0 & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(d) La matrice D est triangulaire donc le spectre est $\{0\}$.
Si D était diagonalisable alors D serait semblable à la matrice nulle et donc elle serait nulle.

$\boxed{D \text{ n'est pas diagonalisable}}$

2. (a) $\mathcal{B}$ est formée de $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, il suffit de montrer qu'elle est libre
La famille $\mathcal{B}$ est formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts donc elle est libre.

$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X])}$

(b)

$$D(H_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} D(H_k) &= \prod_{i=0}^{k-1}(X+1-i) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i) \\ &= \prod_{i=-1}^{k-2}(X-i) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i) \\ &= \prod_{i=0}^{k-2}(X-i)\Big(X+1-(X-k+1)\Big) \\ &= kH_{k-1} \end{aligned}$$

(c) La matrice représentative de D dans la base $\mathcal{B}$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

3.
```
def f1(P, a):
    XP = [0] + P
    aP = [ a*c for c in P] + [0]
    return [XP[i]-aP[i] for i in range(len(XP))]
print(f1([1,1],1))

def H(n):
    P = [1]
    for i in range(n):
        P = f1(P, i)
    return P
print(H(3))
```

4. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) $H_2(Y) = Y^2 - Y$ et Y suit une loi de Poisson donc $H_2(Y)$ admet une espérance et $H_2(Y) = V(Y) + E(Y)^2 - E(Y) = \lambda^2$. $\boxed{H_2(Y) = \lambda^2}$
   $H_1(Y) = Y$ et $H_0(Y) = 1$ $E(H_0(Y)) = 1$ et $E(H_1(Y)) = \lambda$
   (b) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de 1 dans la base (H_0, H_1, H_2) et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ sont celles de X .
   $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de X^2 dans la base (H_0, H_1, H_2). *(En effet : $X^2 = H_1 + H_2$)*
   (c) $X^2 = H_1 + H_2$ donc $E(Y^2) = H_1(Y) + H_2(Y) = \lambda + \lambda^2$, on retrouve $\boxed{V(Y) = \lambda}$
5. (a) • Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\tilde{D}(h_a) = (e^a - 1)h_a$ et $\tilde{D}(k_a) = -(e^a + 1)k_a$
   Quand a décrit $\mathbb{R}$, $e^a - 1$ décrit $]-1; +\infty[$ et $-e^a - 1$ décrit $]-\infty; -1[$
   donc les valeurs de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sont valeurs propre de $\tilde{D}$
   • De plus si -1 était valeur propre de $\tilde{D}$ on aurait une fonction non nulle f vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = 0$, ce qui est impossible
   En conclusion $\boxed{\text{le spectre de } \tilde{D} \text{ est } \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$
   (b) F est bien dans $\mathcal{C}$, on note $g = \tilde{D}(f)$, Comme F est continue et croissante, g est continue et positive.
   Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned}\int_a^b g(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b F(t+1)\mathrm{d}t - \int_a^b F(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{a+1}^{b+1} F(t)\mathrm{d}t - \int_a^b F(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_b^{b+1} F(t)\mathrm{d}t - \int_a^{a+1} F(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$
   Par croissance de F et croissance de l'intégrale, on a alors $F(b) \leqslant \displaystyle\int_b^{b+1} F(t)\mathrm{d}t \leqslant F(b+1)$.
   Par théorème d'encadrement des limites, cette intégrale converge donc vers 1 quand b tend vers $+\infty$.
   De même, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{a+1} F(t)\mathrm{d}t$ converge vers 0 quand a tend vers $-\infty$.
   Finalement, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge, vers 1. Ainsi, $\boxed{g \text{ est bien une densité de probabilité}}$.
   (c) Si F est la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$, on a alors g définie par
$$\forall t < -1,\ g(t) = 0 \qquad \forall t \in [-1, 0],\ g(t) = t + 1 \qquad \forall t \in [0, 1],\ g(t) = 1 - t \qquad \forall t > 1,\ g(t) = 0$$

– –

Exercice non préparé :

1.
```
def simul(N):
    return [ rd.randint(0, 1) for k in range (N) ]
```

2.
```
def longueur():
    L = simul(3)
    while L[-3:] != [1,1,0]:
        L.append(rd.randint(0, 1))
    return len(L)
```

```
N = 10000
S = 0
for k in range(N):
    S += longueur()
print(S/N)
```

Le programme affiche une longueur moyenne proche de 8.