15h20-16h00-16h40
Océane KUJAWA **sujet 10** Alizée TEIXEIRA
Sans préparation : sujet 4

Question de cours :
Définition d'une matrice diagonalisable.

– –

Exercice préparé :
Soit n un entier supérieur ou égal à 2,
pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\Phi(P) = 3XP' + (X^2-1)P''$.

1. Montrer que Φ définie un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. (a) Calculer pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\Phi(X^k)$
   (b) Donner une base de l'image de Φ.
   (c) Donner une base du noyau de Φ.
3. Montrer que Φ est diagonalisable. *(on pourra utiliser le résultat de la question 2.(a))*
4. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note : $S_N = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant N+1} \binom{N+1}{2k+1}$ et $T_N = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant N+1} \binom{N+1}{2k}$
   (a) Écrire une fonction Python prenant en argument un entier naturel N et renvoyant la valeur de S_N . On pourra utiliser `comb(N, j)` de la bibliothèque `math` qui calcule $\binom{N}{j}$.
   (b) Déterminer S_4 et S_5.
   (c) Calculer $S_N + T_N$. Et montrer que $S_N - T_N = 0$
5. On définit pour $N \in \mathbb{N}$ le polynôme :
$$P_N = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant N+1} (-1)^k \binom{N+1}{2k+1} (1-X^2)^k X^{N-2k}$$
   (a) Donner les polynômes P_0, P_1 et P_2.
   (b) Déterminer le monôme dominant de P_N.
   (c) Montrer que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (d) Montrer que $\sin((N+1)t) = \sin(t)P_N(\cos(t))$. *On pourra développer* $(\cos(t) + i\sin(t))^{N+1}$
   (e) En dérivant deux fois l'égalité précédente montrer que :
$$(N^2+2N)P_N - 3XP_N' - (X^2-1)P_N'' = 0$$
   (f) Diagonaliser Φ. *(Autrement dit : Donner une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ)*

16h40-17h20-18h00
Caroline BLANCHARD **sujet 11** KOUADIO Sarah
Sans préparation : sujet 6

Question de cours :

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et ne s'annulant pas, que veut dire la phrase « f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ » ?

– –

Exercice préparé :

Une urne contient initialement une boule bleue et une boule rouge, si on tire la boule bleue on retire ensuite dans la même urne sans avoir remis la boule bleue, si on tire une boule rouge on refait un tirage dans une urne contenant une boule bleue et une boule rouge. On enchaîne ainsi des tirages indéfiniment.

Après une boule bleue on a toujours une boule rouge et après une rouge on obtient de manière équiprobable une rouge ou une bleue.

On note r_n (resp. b_n) la probabilité de tirer une boule rouge (resp. bleue) au n-ième tirage

1. (a) Déterminez r_{n+1} et b_{n+1} en fonction de r_n et b_n
   (b) En déduire r_n et b_n en fonction de n
2. On note X le rang du premier tirage d'une boule bleue et Y le rang du premier tirage d'une boule rouge
   (a) Écrivez une fonction python `simul_XY()` qui simule X et Y
   (b) À l'aide de python déterminer une valeur approchée de l'espérance de X et de Y
   (c) Donner les lois de X et de Y.
   (d) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On note Z_n le nombre de boules bleue tirées au cours des n tirages
   (a) Donner les lois de Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4
   (b) Quelles sont les valeurs prises par Z_n en fonction de n ? *(On pourra faire des cas suivant la parité de n)*
   (c) Déterminer la probabilité que Z_n prenne sa plus petite valeur.
   (d) Déterminer la probabilité que Z_n prenne sa plus grande valeur.
   (e) Pour $k \in [\![0; n]\!]$, déterminer $P(Z_n = k)$.

16h00-16h40-17h20.
Noémie ROBIN **sujet 13** EL MRANI Sarah
Sans préparation : sujet 5

Question de cours :
Allure de la représentation graphique de la fonction cos sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

– –

Exercice préparé :
On note f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & \text{si} \quad x \in [-2,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. *(on pourra utiliser le changement de variable $x = 2\sin(u)$)*

   On considère une variable aléatoire X de densité f.

2. (a) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$, que X^n admet une espérance.

   (b) Que vaut $E(X^{2k+1})$ pour $k \in \mathbb{N}$?

   Dans la suite on étudie $U_k = E(X^{2k})$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. (a) Compléter le programme suivant permettant d'estimer les 10 premières valeurs de U_k.

```
import scipy.integrate as scipy
for k in range (11):
    def g(x):
        return
    print(scipy.quad(g, -2, 2))
```

   Indication : l'instruction `scipy.quad(g, -2, 2)` *renvoie une valeur approchée de* $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(t)\,dt$.

   (b) Rappeler le théorème des sommes de Riemann et en déduire un autre programme permettant de réaliser les estimations précédentes.

4. (a) Montrer que la fonction $g : x \longmapsto x\sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $\big[0\,,1\big]$.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$U_{k+1} = \frac{2(2k+1)}{k+2}U_k$$

   Indication : Calculer $4U_k - U_{k+1}$ en utilisant une intégration par parties.

   (c) Ecrire un programme Python qui permet de vérifier que les 100 premiers termes U_k sont des entiers naturels. Donner à l'aide de ce programme les 6 derniers chiffres de U_{100}

   (d) Exprimer U_k en fonction de k avec des factoriels.

   (e) En utilisant la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$ montrer que :

$$U_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{4^k}{k\sqrt{\pi k}}$$

– –

17h20-18h00-18h40
Maxime HAGUE **sujet 13** Inès CLOEREC
Sans préparation : sujet 5

Question de cours :
Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

– –

Exercice préparé :
On note f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & \text{si} \quad x \in [-2,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. *(on pourra utiliser le changement de variable $x = 2\sin(u)$)*

   On considère une variable aléatoire X de densité f.

2. (a) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$, que X^n admet une espérance.

   (b) Que vaut $E(X^{2k+1})$ pour $k \in \mathbb{N}$?

   Dans la suite on étudie $U_k = E(X^{2k})$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. (a) Compléter le programme suivant permettant d'estimer les 10 premières valeurs de U_k.

```
import scipy.integrate as scipy
for k in range (11):
    def g(x):
        return
    print(scipy.quad(g, -2, 2))
```

   Indication : l'instruction `scipy.quad(g, -2, 2)` *renvoie une valeur approchée de* $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(t)\,dt$.

   (b) Rappeler le théorème des sommes de Riemann et en déduire un autre programme permettant de réaliser les estimations précédentes.

4. (a) Montrer que la fonction $g : x \longmapsto x\sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $[0\,,1\,]$.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$U_{k+1} = \frac{2(2k+1)}{k+2}U_k$$

   Indication : Calculer $4U_k - U_{k+1}$ en utilisant une intégration par parties.

   (c) Ecrire un programme Python qui permet de vérifier que les 100 premiers termes U_k sont des entiers naturels. Donner à l'aide de ce programme les 6 derniers chiffres de U_{100}

   (d) Exprimer U_k en fonction de k avec des factoriels.

   (e) En utilisant la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$ montrer que :

$$U_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{4^k}{k\sqrt{\pi k}}$$

18h00-18h40-19h20
Justine RIVOISY **sujet 14** Oriane BRANGER
Sans préparation : sujet 6

Question de cours :

Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$?

– –

Exercice préparé :

Une urne contient initialement une boule bleue et une boule rouge, si on tire la boule bleue on retire ensuite dans la même urne sans avoir remis la boule bleue, si on tire une boule rouge on refait un tirage dans une urne contenant une boule bleue et une boule rouge. On enchaîne ainsi des tirages indéfiniment.
Après une boule bleue on a toujours une boule rouge et après une rouge on obtient de manière équiprobable une rouge ou une bleue.

On note r_n (resp. b_n) la probabilité de tirer une boule rouge (resp. bleue) au n-ième tirage

1. (a) Déterminez r_{n+1} et b_{n+1} en fonction de r_n et b_n
   (b) En déduire r_n et b_n en fonction de n

On note Z_n le nombre de boules bleues tirées au cours des n tirages

2. (a) Ecrire une fonction Python `simul_Z(n)` qui permet de simuler la réalisation de Z_n.
   (b) Trouver une valeur approchée de l'espérance de Z_n pour n allant de 2 à 10.
3. Donner les lois de Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 et calculer leur espérance.
4. Quelles sont les valeurs prises par Z_n en fonction de n ? *(On pourra faire des cas suivant la parité de n)*
5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \left[\!\left[0; \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor\right]\!\right]$:

$$P(Z_{n+2} = k) = \frac{1}{2}P(Z_{n+1} = k) + \frac{1}{2}P(Z_n = k-1)$$

   (b) En déduire une relation donnant $E(Z_{n+2})$ en fonction de $E(Z_{n+1})$ et $E(Z_n)$,
   puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad E(Z_n) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3}$
6. (a) Déterminer la probabilité que Z_n prenne sa plus petite valeur.
   (b) Déterminer la probabilité que Z_n prenne sa plus grande valeur.
   (c) Pour $k \in [\![0; n]\!]$, déterminer $P(Z_n = k)$.