Correction de la feuille Oraux_5 : Du cours, un exercice à préparer et 10mn sans préparation.

Du cours.

Tableau 1 : 1) Définition de : "La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X à densité".

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n \leqslant x) = P(X \leqslant x)$$

2) Donner le développement limité d'ordre 4 de e^x en 0.

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

3) Définition de la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dans des bases.

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = Mat_{\mathscr{B}'}(f(\mathscr{B}))$$

4) Donner les dérivées $k-$ième du monôme X^n.

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ (X^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}X^{n-k} \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant n+1,\ (X^n)^{(k)} = 0$$

Tableau 2 : 1) Donner le théorème central limite.
Soit (X_n) est une suite de VAR indépendantes, tous d'espérance μ et de variance σ^2,
si $M_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ alors M_n^* converge en loi vers X avec $X \sim \mathscr{N}(0,1)$

2) Donner le théorème des sommes de Riemann.
Pour f définie sur $[a,b]$, on note $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$
Si f est continue sur $[a,b]$ alors la suite (S_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

3) Définition du minimum d'une partie de $\mathbb{R}$ et d'un minorant d'une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$:
- Le minimum de A (si il existe) est un élément a de A qui vérifie $\forall x \in A,\ a \leqslant x$.
- un minorant de A (quand ils existent) est un réel a qui vérifie $\forall x \in A,\ a \leqslant x$.

4) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
Si f est continue sur $[a,b]$ alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution.

Tableau 3 : 1) Donner la densité continue de la loi normale centrée réduite et l'allure de sa représentation graphique.

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2) Enoncer le théorème donnant l'expression de (u_n) vérifiant $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$
Δ discriminant de $x^2 - ax - b$
Cas 1 : $\Delta > 0$: il existe deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$
Cas 2 : $\Delta = 0$: il existe deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha q_0^n + \beta n q_0^n$
Cas 3 : $\Delta < 0$: il existe deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha r^n \cos(n\theta) + \beta r^n \sin(n\theta)$

3) Pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements, donner à la définition de $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in A_n\} \qquad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N} : \quad \omega \in A_n\}$$

4) Théorème de la limite monotone pour une suite réelle.

Si (u_n) est monotone alors (u_n) admet une limite.

Tableau 4 : 1) Donner le théorème de d'Alembert-Gauss.

Tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe.

2) Enoncer le théorème dit "des gendarmes" pour les suites.
Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites à valeurs réelles,
Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers un réel ℓ
alors (v_n) est convergente et sa limite est ℓ.

3) Donner la dérivée de $t \longmapsto f(x(t), y(t))$
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}, f : P \to \mathbb{R}$ de classe C^1,
$x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que : $\forall t \in I, \quad (x(t), y(t)) \in P$.
La fonction $t \longmapsto f(x(t), y(t))$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction :

$$t \longmapsto x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

4) Donner la somme des n premiers entiers et des n premiers carrés.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Tableau 5 : 1) Donner la définition de la loi binomiale de paramètre (n, p), son espérance et sa variance.
Dire que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = [\![0; n]\!] \\ \forall k \in [\![0; n]\!], \quad \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)$$

2) Définition d'un système complet d'événements (version dénombrable).
Dire que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements signifie que :

$$(1)\ \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{et} \quad (2) \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$$

3) Caractérisation de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,
la projection orthogonale sur F est l'endomorphisme p_F de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :
(1) $p_F \circ p_F = p_F$.
(2) $\ker(p_F)$ est égal à $F^\perp$.
(3) $\mathrm{Im}(p_F)$ est égal à F.

4) Définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ pour k et n deux entiers.
si $0 \leqslant k \leqslant n$ alors $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, sinon $\binom{n}{k} = 0$

Tableau 6 : 1) Donner la définition de la loi de Poisson de paramètre λ, son espérance et sa variance.

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \qquad E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

2) Enoncer le théorème donnant la dérivée de $g \circ f$ lorsque f et g sont deux fonctions dérivables.

$$\text{Si} \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I, \\ g \text{ est dérivable sur } J, \\ \text{et } \forall x \in I, \quad f(x) \in J \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} g \circ f \text{ est dérivable sur } I \\ \text{et} \\ \forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) \end{cases}$$

3) Définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base.

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = Mat_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$$

4) Définition d'une bijection.

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : \ f(x) = y$$

Un exercice court *(Six élèves au tableau après 10 minutes de préparation.)*

Tableau 1 : 1) Une matrice 2×2 est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.

$$\boxed{M \text{ est inversible si, et seulement si, } x^2 - y^2 \neq 0}$$

2) *(non corrigé)*

Tableau 2 : Remarque $Z = \max(X, Y)$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leqslant x) \\ &= P((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant x)) \\ &= P(X \leqslant x)\ P(Y \leqslant x) \\ &= \Phi(x)^2 \end{aligned}$$

F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ *(il le fallait)* et C^1 sur $\mathbb{R}$ *(elle aurait pu ne pas l'être en un nombre fini de réels)* donc Z est à densité et $g : x \mapsto 2f(x)\Phi(x)$ est une densité de Z.

2) *(Pour l'existence de l'espérance c'est l'occasion de parler de CV / ACV dans ce cas, remarque faite dans le cours)*
Pour a et b deux réels,

$$\begin{aligned} \int_a^b xg(x)\,\mathrm{d}x &= 2\int_a^b xf(x)\Phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\Big[(-f(x))\Phi(x)\Big]_a^b - \int_a^b (-f(x))f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -2\Big[f(x)\Phi(x)\Big]_a^b + 2\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- D'une part : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\Phi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\Phi(x) = 0$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{(avec } \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\textit{)} \end{aligned}$$

or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t = \sigma\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}$

En conclusion :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

Tableau 3 : 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

A est triangulaire donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$ et $A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\dim(E_1(A)) = 1$

et ainsi $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

$\det(B - \lambda I_2) = (-4-\lambda)(5-\lambda) + 18 = (\lambda+1)(\lambda-2)$
B est donc une matrice 2×2 avec deux valeurs propres distinctes donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$.

2) *(non corrigé)*

Tableau 4 : On note (E_0) : $\quad y'' - 2y' + 2y = 0$
Le polynôme caractéristique est : $r^2 - 2r + 2 = 0$ de racines sont complexes conjuguées : $r = 1 \pm i$
L'ensemble des solutions de E_0 est donc : $\{x \longmapsto e^x\,(A\cos(x) + B\sin(x)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\ \}$
On cherche donc une solution y_p sous la forme : $y_p : x \longmapsto ax^2 + bx + c$

$$2a - 2(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2$$

...
Donc $y_p : x \longmapsto x^2 + 2x + 1$ est une solution particulière de E.
La solution recherchée est de la forme :

$$f(x) = e^x(A\cos x + B\sin x) + x^2 + 2x + 1$$

Il reste à déterminer A et B avec les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$
on trouve $A = 0$ et $B = 1$
La solution unique de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$ est :

$$\boxed{f : x \longmapsto e^x \sin x + x^2 + 2x + 1}$$

Tableau 5 : Soit $u = (u_1, ..., u_n)$ un vecteur unitaire *(de norme 1)* et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant pour coefficients $u_i u_j$, où $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

1) A est symétrique réelle donc diagonalisable et ainsi $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$
2) On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$
   On remarque que $f(e_i) = u_i.u$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(u)$ et comme $u \neq 0_n$ il y a au moins un $f(e_i)$ non nul.
   donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)}$
3) *(non corrigé)*

Tableau 6 : 1) *(On applique le théorème de convergence par comparaison)*
On fixe $t \in [0, 1]$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant P(X = k)\,t^k \leqslant P(X = k) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k \geqslant 0} P(X = k) \text{ converge}$$

$$\text{donc} \quad \sum_{k \geqslant 0} P(X = k)\,t^k \quad \text{converge} \qquad \left(\text{ ou } \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\,t^k \ \text{ existe}\right)$$

Remarque du correcteur qui est moins au point que certains d'entre-vous sur le cours :
Tom et Maxime avaient raison, au tableau je ne distinguais pas les notions de sommes et de séries, c'est inadmissible.

$$\boxed{g_X \text{ est bien définie sur } [0, 1]}$$

Et on remarque que $g_X(1) = E(X)$.

2) *(non corrigé)*
3) *(non corrigé)*
4) *(non corrigé)*