Fiche de révision – Récurrences et Sommes

1. Raisonnement par récurrence

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propositions.

1.1. Principe de récurrence simple

Si :
1. **Initialisation** : P_{n_0} est vraie pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$,
2. **Hérédité** : $\forall n \geq n_0,\ P_n \Rightarrow P_{n+1}$,

alors

$$\forall n \geq n_0,\ P_n \text{ est vraie.}$$

1.2. Principe de récurrence d'ordre 2

Si :
1. **Initialisation** : P_{n_0} et P_{n_0+1} sont vraies,
2. **Hérédité** : $\forall n \geq n_0,\ P_n \textit{ et } P_{n+1} \Rightarrow P_{n+2}$,

alors

$$\forall n \geq n_0,\ P_n \text{ est vraie.}$$

1.3. Récurrence forte

Si :
1. P_{n_0} est vraie,
2. $\forall n \geq n_0,\ \big(\forall k \in [n_0, n],\ P_k\big) \Rightarrow P_{n+1}$,

alors

$$\forall n \geq n_0,\ P_n \text{ est vraie.}$$

2. Manipulation de sommes

2.1. Définition

Pour $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ et $a \leq b$, a et b des entiers.

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = f(a) + f(a+1) + \cdots + f(b).$$

2.2. Convention

Si $a > b$, alors $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k = 0$.

2.3. Linéaire

$$\sum_{k=a}^{b} (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=a}^{b} u_k + \beta \sum_{k=a}^{b} v_k.$$

2.4. Décalage d'indices

$$\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{j=a+r}^{b+r} u_{j-r}.$$

2.5. Lecture inverse

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$$

2.6. Découpage (relation de Chasles)

Si $a \leq c < b$, alors

$$\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{k=a}^{c} u_k + \sum_{k=c+1}^{b} u_k.$$

2.7. Sommes usuelles

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2.8. Sommes télescopiques

Si $u_k = v_{k+1} - v_k$, alors

$$\sum_{k=a}^{b} u_k = v_{b+1} - v_a.$$

2.9. Indices pairs, indices impairs

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u_{2k+1}$$

3. Sommes doubles

3.1. Définition

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right)$$

3.2. Interversion d'ordre

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

3.3. Cas particulier $a_{i,j} = \alpha_i \beta_j$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^{m} \beta_i$$

3.4. Inversion d'ordre des sommes triangulaires

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij}$$

3.5. Inversion des sommes triangulaires strictes

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$$