Feuille-Activité 1 : Suites et sommes.

Révision sur les suites numériques.

Suites usuelles : arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique et récurrente linéaire d'ordre 2.?

Limites de suites. Suites équivalentes. Croissances comparées. Limite et relation d'ordre. Théorème des gendarmes.

Théoréme de convergence monotone. Suites adjacentes. Exemples de suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Manipulation des sommes finies. Des sommes doubles finies. Changement d'indice. Sommes télescopiques.

Raisonnement par récurrence

Ex 1 : Calculer :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^k} \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) \qquad S_3 = \sum_{i=3}^{n} 4i \qquad S_4 = \sum_{i=1}^{n}(-2)^i$$

Ex 2 : On considère une suite (u_n) vérifiant : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4u_{n+1} + u_n = 2$

1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Exprimer en fonction de n (*sans somme*) la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
3) Déterminer la limite des suites (u_n) et (S_n).

Ex 3 : Déterminer une expression de u_n en fonction de n dans les cas suivants :

1) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$
2) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$
3) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

Ex 4 : 1) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

2) Montrer que la suite $(n!)$ est négligeable devant la suite (n^n).

Pour cela on pourra poser $u_n = \frac{n^n}{n!}$ et montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Ex 5 : Déterminer la limite des suites (u_n) définies par les expressions suivantes :

❶ $u_n = \dfrac{(-1)^n n}{n^2+n+1}$ ❷ $u_n = \dfrac{n3^n - 4^n}{-4^n + n^2}$ ❸ $u_n = \dfrac{\sqrt{3^n+1}}{5-2^n}$

Ex 6 : Soit (a_n) la suite définie par :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Montrer que les suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont adjacentes.
Que peut-on en déduire pour la suite (a_n) ?

Ex 7 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$ et $f : x \longmapsto \frac{x^2+x}{2}$

a) Déterminer le signe de $f(x) - x$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1]$
c) En déduire la monotonie de la suite (u_n).

Ex 8 : Montrer les équivalences suivantes :

❶ $\ln\left(\dfrac{n^2}{n^2-3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n^2}$ ❷ $\dfrac{3n^2+1}{3^n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3}.\dfrac{n(n-1)}{3^{n-2}}$

Ex 9 : Calculer les sommes :

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\qquad S_2=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\qquad S_3=\sum_{k=1}^{n}k\times k!$$

Ex 10 : *(Formule de Bernoulli)*
Montrer que pour tout entier naturel n et tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$:

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k$$

Ex 11 : Simplifier les sommes suivantes :

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i\,j^3\qquad S_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}ij\qquad S_3=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(i+1)$$

Ex 12 : Pour n un entier naturel non nul, simplifier : $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i\,2^i$. *On pourra utiliser* $i2^i=\displaystyle\sum_{j=1}^{i}2^i$.

Ex 13 : (M.M.I 2024)
Une suite (v_n) modélise le nombre d'individus dans la population à la génération n.
On dit qu'il y a extinction si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n=0$.
On propose le modèle suivant : chaque individu a un nombre de descendants $q>0$, de telle sorte que

$$\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=qv_n.$$

Résoudre le modèle et donner une condition d'extinction.

Ex 14 : (M.C.R 2025)
On définit pour $(a,b)\in\mathbb{N}^2$,

$$I_{a,b}=\frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

1) Déterminer la limite de la suite de terme général $\dfrac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}}$.
2) Soit u une suite réelle et ℓ un réel.
Donner la définition, avec quantificateurs, de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell$.
3) En déduire l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$ on ait :

$$\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}}\leq\frac{1}{2}$$

4) En déduire que pour tout $n\geq n_0$ on a : $I_{n,n}\leq\dfrac{2^{n_0}I_{n_0,n_0}}{2^n}$.
5) Déterminer un équivalent de $\ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6) En déduire la limite de $\exp\left((2n+1)\ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
7) On admet l'équivalent suivant (dit de Stirling) :

$$n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

En déduire un équivalent de $4^nI_{n,n}$.

Ex 15 : (M.C.R 2024)

1) Démontrer que, pour tout entier $i>1$, on a :

$$\int_i^{i+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\frac{1}{i}\leqslant\int_{i-1}^{i}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

2) Justifier l'équivalent : $\ln(n+1)\underset{n\to\infty}{\sim}\ln(n)$.
3) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.