Correction de la Feuille-Activité 1 : Suites et sommes.

Ex 1 : $S_1 = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = 2\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$ donc $\boxed{S_1 = 3 - \frac{1}{3^n}}$

$S_2 = n\times\frac{(3+2n+1)}{2}$ ou $S_2 = 2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$ donc $\boxed{S_2 = n(n+2)}$

$S_3 = 4\left(\sum_{i=1}^{n} i \ - \ 1 - 2\right)$ ou $S_3 = (n-2)\frac{12+4n}{2}$ donc $\boxed{S_3 = 2(n-2)(n+3)}$

$S_4 = \sum_{i=1}^{n}(-2)^i = (-2)\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}$ donc $\boxed{S_4 = \frac{2}{3}\left((-2)^n - 1\right)}$

Ex 2 : On a : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}$ (*suite arithmetico-géométrique*)

1) Le point fixe est : $\ell = \frac{2}{5}$ en effet : $\ell = -\frac{1}{4}\ell + \frac{1}{2} \iff \frac{5}{4}\ell = \frac{1}{2}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\ell = -\frac{1}{4}\ell + \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}$ donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} - \ell = -\frac{1}{4}(u_n - \ell)$$

la suite $(u_n - \ell)$ est donc géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ ce qui permet d'écrire que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n - \ell = (u_0 - \ell)\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{5}}$$

2) Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^k + \frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{8}{5}\,\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} + \frac{2}{5}(n+1) \\ &= \frac{32}{25}\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{2}{5}n + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad S_n = \frac{8}{25}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2n}{5} + \frac{42}{25}}$$

3) $-\dfrac{1}{4} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ et ainsi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{5}}$

et comme de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{5} + \dfrac{42}{25} = +\infty$ on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$

Ex 3 : 1) On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique :

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \qquad (\iff (x-3)^2 = 0\ )$$

Cette équation a une unique racine réelle donc il existe α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\alpha + \beta n)3^n$. de plus α et β vérifient le système :

$$\begin{cases} \alpha = 1\ (= u_0) \\ \alpha + \beta = 0\ (= u_1) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1-n)\,3^n}$$

2) On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique :

$$2x^2 + x - 1 = 0 \qquad (\iff (x+1)(2x-1) = 0\ )$$

Cette équation a deux racines réelles distinctes donc il existe α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha(-1)^n + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

de plus α et β vérifient le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1\ (= u_0) \\ -\alpha + \dfrac{1}{2}\beta = 1\ (= u_1) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{3} \\ \beta = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

3) On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique :

$$x^2 - x + 1 = 0 \qquad (\iff \left(x - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(x - e^{\frac{-i\pi}{3}}\right) = 0\ )$$

Cette équation a deux racines complexes distinctes conjuguées donc il existe α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \beta\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

de plus α et β vérifient le système :

$$\begin{cases} \alpha = 1\ (= u_0) \\ \dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta = 1\ (= u_1) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}$$

Ex 4 : 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

et sachant que $\lim\limits_{x\to1} e^x = e$, on peut alors en conclure que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e}$

2) *(non corrigé)*

Ex 5 : ❶ *On peut encadrer, mais on peut aussi utiliser la valeur absolue.*

$$\begin{aligned} |u_n| &= \frac{n}{n^2+n+1} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

($(|u_n - 0|)$ converge vers 0), donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$.

❷ *On factorise "en haut et en bas" par le terme prépondérant.*

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n3^n - 4^n}{-4^n + n^2} \\ &= \frac{-4^n}{-4^n} \times \frac{1 - n\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{n^2}{4^n}} \\ &= \frac{1 - n\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{n^2}{4^n}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

En effet *(croissances comparées)* : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{4^n} = 0$

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1}$$

.

Ex 6 : • Etudions (a_{2n}), (en posant $u_n = a_{2n}$, $u_{n+1} - u_n = a_{2n+2} - a_{2n}$)
Pour n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{2n+2} - a_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2+1}}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \quad > 0 \end{aligned}$$

La suite (a_{2n}) est croissante.

• De même pour n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{2n+3} - a_{2n+1} &= \frac{(-1)^{2n+2+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3+1}}{2n+3} \\ &= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \\ &= -\frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \quad < 0 \end{aligned}$$

La suite (a_{2n+1}) est décroissante.

• De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} - a_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Les trois résultats précédents permettent de conclure que

$$\boxed{\text{les suite } (a_{2n}) \text{ et } (a_{2n+1}) \text{ sont adjacentes}}$$

Le théorème de suites adjacentes permet alors d'affirmer que :

les suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont convergentes et vers la même limite.

On peut alors en déduire que : *(Théorème sur les suites extraites)*

$$\boxed{(a_n) \text{ est convergente}}$$

Ex 7 : 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) - x = \dfrac{x^2+x}{2} - x = \dfrac{x^2-x}{2} = \dfrac{x(x-1)}{2}$

donc

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) L'étude de f donne le tableau de variations suivant : *(à faire, mais sans difficulté)*

x	0		1
f	0	$\nearrow$	1

On peut en déduire que $f([0,1]) \subset [0,1]$. $\quad$ *($[0,1]$ est stable par f)*

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in [0,1]$,

- Pour $n = 0$,

  $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc on a bien $\quad u_0 \in [0,1]$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\quad u_n \in [0,1]$,

  on a $u_n \in [0,1]$ et $[0,1]$ est stable par f donc $f(u_n) \in [0,1]$ et ainsi $u_{n+1} \in [0,1]$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]}$$

3) D'après a) $\forall x \in [0,1]$, $f(x) - x \leqslant 0$ et d'après b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$,

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) - u_n \leqslant 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ce qui permet de conclure :

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$$

Ex 8 : (non corrigé)

Ex 9 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) \qquad \text{Somme télescopique} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_1 = \ln(n+1)}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(k^2-1\right)-\ln\left(k^2\right)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln(k-1)+\ln(k+1)-2\ln(k) \Big) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln(k-1)-\ln(k)\Big) + \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln(k+1)-\ln(k)\Big) \\
&= \ln(1)-\ln(n)+\ln(n+1)-\ln(2) \qquad \textit{Sommes télescopiques}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_2 = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{k=1}^{n} k \times k! \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)\times(k-1)! \qquad \textit{(changement d'indice)} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \Big(k\times(k-1)! - 1\times(k-1)!\Big) \qquad \textit{(on développe)} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \Big(k! - (k-1)!\Big) \\
&= (n+1)! - 1! \qquad \textit{(Somme télescopique)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_3 = (n+1)! - 1}$$

Ex 10 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k &= \sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k}b^k - \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k}b^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^{n-k+1}b^k \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k}b^k - \sum_{k=1}^{n} a^{n-k+1}b^k - b^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k}$$

Ex 11 : (non corrigé)

Ex 12 :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} i2^i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} 2^i \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j \ \frac{1-2^{n-j+1}}{1-2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(2^{n+1}-2^j\right) \\
&= n2^{n+1} - 2\ \frac{1-2^n}{1-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_0 = (n-1)2^{n+1}+2}$$

Ex 13 : 1) $\dfrac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \dfrac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+3)!} \times \dfrac{(2n+1)!}{n!n!} = \dfrac{(n+1)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{4n^2} = \dfrac{1}{4}.$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \frac{1}{4}}$$

2) Dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ signifie que :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0 \Rightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon}$$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \dfrac{1}{4}$ donc en utilisant la définition avec $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ et $u_n = \dfrac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}}$ il vient :

$$\boxed{\text{il existe } n_0 \text{ tel que : } \forall n \geqslant n_0,\ \ \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \leqslant \frac{1}{2}}$$

4) *On peut raisonner ici par récurrence sur $n \geqslant n_0$ ou en faisant un produit comme ci-dessus :*

On a : $\quad \forall k \geqslant n_0,\ \dfrac{I_{k+1,k+1}}{I_{k,k}} \leqslant \dfrac{1}{2},$

donc en faisant le produit pour k entre n_0 et $n-1$ il vient (*produit télescopique*) : $\dfrac{I_{n,n}}{I_{n_0,n_0}} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-n_0}}$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant n_0,\quad I_{n,n} \leqslant \frac{2^{n_0}}{2^n} I_{n_0,n_0}}$$

5) $\ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right) = \ln\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n+1} \quad$ puisque $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{2n+1} = 0.$

$$\boxed{\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}}$$

6) On déduit de la question précédente que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right) = -1$ et par composition avec exp on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \exp\left((2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right) = e^{-1}}$$

7)

$$\begin{aligned} 4^n I_{n,n} &= 4^n \frac{n!n!}{(2n+1)!} \\ &\sim 4^n \frac{n^n.n^n}{(2n+1)^{2n+1}} \frac{e^{2n+1}}{e^n.e^n} \frac{2\pi n}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \\ &\sim \frac{1}{2n} \exp\left((2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right).e.\sqrt{\frac{2\pi n^2}{2n+1}} \\ &\sim \frac{1}{2n}.e^{-1}.e.\sqrt{\pi n} \end{aligned}$$

$$\boxed{4^n I_{n,n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Ex 14 : 1) Pour $i \geqslant 2$

$t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[i-1; i+1]$ donc $\boxed{\displaystyle\int_i^{i+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}$

En effet :

d'une part : $\forall t \in [i-1, i], \quad \dfrac{1}{i} \leqslant \dfrac{1}{t}$ donc $\displaystyle\frac{1}{i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$,

d'autre part : $\forall t \in [i, i+1], \quad \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{i}$ donc $\displaystyle\int_i^{i+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{i}$

2) Pour $n \geqslant 2$, $\quad \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

or $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

$$\boxed{\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

3) On note $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

En sommant la relation de la question 3 (a) pour i allant de 2 à un entier $n \geqslant 2$, et en utilisant la relation de Chasles on obtient :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant A_n - 1 \leqslant \ln(n)$$

Ce qui nous donne l'encadrement :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{\ln(2)-1}{\ln(n)} \leqslant \frac{A_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

donc *(théorème des gendarmes et le résultat de la question 2))* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{\ln(n)} = 1$, ou encore :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$