Correction de la Feuille-Activité 1 : Suites et sommes.

Ex 1 : $S_1 = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = 2\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$ donc $\boxed{S_1 = 3-\frac{1}{3^n}}$

$S_2 = n\times\frac{(3+2n+1)}{2}$ ou $S_2 = 2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$ donc $\boxed{S_2 = n(n+2)}$

$S_3 = 4\left(\sum_{i=1}^{n} i \ - \ 1-2\right)$ ou $S_3 = (n-2)\frac{12+4n}{2}$ donc $\boxed{S_3 = 2(n-2)(n+3)}$

$S_4 = \sum_{i=1}^{n}(-2)^i = (-2)\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}$ donc $\boxed{S_4 = \frac{2}{3}\left((-2)^n-1\right)}$

Ex 2 : *(non corrigé)*

Ex 3 : *(non corrigé)*

Ex 4 : 1) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$ ou encore $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$

et sachant que $\lim_{x\to1} e^x = e$, on peut alors en conclure que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$

2) *(non corrigé)*

Ex 5 : *(non corrigé)*

Ex 6 : • Etudions (a_{2n}), (en posant $u_n = a_{2n}$, $u_{n+1}-u_n = a_{2n+2}-a_{2n}$)

Pour n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{2n+2}-a_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1}+\frac{(-1)^{2n+2+1}}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \quad >0 \end{aligned}$$

La suite (a_{2n}) est croissante.

• De même pour n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{2n+3}-a_{2n+1} &= \frac{(-1)^{2n+2+1}}{2n+2}+\frac{(-1)^{2n+3+1}}{2n+3} \\ &= -\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3} \\ &= -\frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \quad <0 \end{aligned}$$

La suite (a_{2n+1}) est décroissante.

• De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_{2n+1} - a_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Les trois résultats précédents permettent de conclure que

$$\boxed{\text{les suite } (a_{2n}) \text{ et } (a_{2n+1}) \text{ sont adjacentes}}$$

Le théorème de suites adjacentes permet alors d'affirmer que :

les suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont convergentes et vers la même limite.

On peut alors en déduire que : *(Théorème sur les suites extraites)*

$$\boxed{(a_n) \text{ est convergente}}$$

La suite n'est pas corrigée.