Fiche de révision – Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Définition

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on définit le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Produit : $$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$$

Interprétation combinatoire :
$\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir k éléments parmi n.

Informatique :

```
def Coeff(n, k):
    num = 1
    for i in range(n-k+1, n+1):
        num = num*i
    den = 1
    for i in range(1, k):
        den = den*i
    return num//den
```

Dans le module `math` la fonction `comb`

2. Propriétés fondamentales

2.1. Valeurs particulières

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2.2. Symétrie

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

2.3. Relation de Pascal

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Triangle de Pascal.

2.4. Formule du chef

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad \binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}.$$

2.5. Sommes

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \ \ (n \geq 1).$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}, \qquad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

3. Formule du binôme de Newton

3.1. Énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

3.2. Conséquences

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

3.3. En algèbre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2$:

si $AB = BA$ alors $$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

4. Autres formules

4.1. Formule de Bernoulli

Pour tout entier naturel n et tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$$

4.2. Identité de Vandermonde (complément)

$$\forall m, n, r \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$