Feuille_Act_2 : Coefficients binomiaux et formule du binôme.

Ex 1 : Soit $p \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $\forall j \in [\![0, p]\!]$, $\quad \binom{p}{j}\dfrac{1}{1+j} = \binom{p+1}{j+1}\dfrac{1}{p+1}$.

2) Montrer que $\forall j \in [\![0, p-1]\!]$, $\quad \binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j}$.

Ex 2 : Développer *rapidement* avec le triangle de Pascal :

$$(1+x)^4 \qquad (a-b)^6 \qquad (1-x)^3 \qquad (x-1)^7 \qquad (x+2)^5 \qquad (2x-1)^3$$

Ex 3 : Simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3\times 2^{k+1} \qquad \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 4^k \qquad \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k} \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}$$

Ex 4 : Calculer pour un entier naturel n, les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \qquad \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}$$

Ex 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer par récurrence sur p, que :

$$\forall p \in \mathbb{N}\ , \quad \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k} \;=\; (-1)^p\binom{n-1}{p}$$

Ex 6 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$

Ex 7 : Montrer que pour tout entier n :

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

Indication : on fera le changement d'indice $k \to n-k$.

Ex 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n}{2k}$ $\qquad$ et $\qquad t_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\binom{n}{2k+1}$

Autrement dit : $s_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}$ $\qquad$ et $\qquad t_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}$

1) Calculer $s_n + t_n$ et $s_n - t_n$

2) En déduire s_n et t_n en fonction de la valeur de n.

Ex 9 : Simplifier la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\,3^k$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\,3^{k-1}$ en fonction de n.

Ex 10 : Simplifier les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k 5^{n-1-k} \qquad S_2 = \sum_{k=2}^{2n}\binom{2n}{k}2^{2k} \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{2k}5^{n-k}$$

Ex 11 : Pour tout entier naturel n, on pose : $d_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$

1) Que contient la variable L à la fin du programme suivant :

```
L = [ [1] ]
for i in range(100):
    A = [0] + L[-1]
    B =  L[-1]  + [0]
    for k in range(len(A)):
        A[k] = A[k] + B[k]
    L.append(A)
```

On décrira `L` *avant la boucle* "`for i` ", *puis on expliquera son évolution aux premiers tours.*

2) Compléter le programme précédent pour qu'il affiche les d_n pour n compris entre 0 et 20.
3) Calculer d_n pour n compris entre 0 et 5.
4) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$.
5) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $d_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$
6) Montrer que (d_n) admet une limite que l'on déterminera.

Ex 12 : 1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et on note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$P_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = \prod_{j=1}^{n} (1 - a_j)$$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$, quelle relation de récurrence simple existe-t-il entre P_n et P_{n+1} ?

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} = 1$.

2) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in \{1; 2; \cdots; n\}$, on pose : $a_j = \frac{j}{n}$ de sorte que :

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \quad P_k = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

a. Que vaut P_n ?

b. Montrer que pour tout $k \in \{1; 2; \cdots; n-1\}$, on a : $P_k = \frac{k!}{n^k} \binom{n-1}{k}$.

c. La formule de la question précédente est-elle encore valable pour $k = 0$ et $k = n$?

3) Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{k!}{n^k} = 1$.