

Feuille_Act.3 : Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Ex 1. Calculer les intégrales en passant par un calcul d'aire.

$$\int_1^2 (x+1) \, dx \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

Ex 2. Donner la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_1^0 x^2 \, dx \qquad \int_2^0 x^2 \, dx$$

Ex 3. Montrer que $0 \leq \int_0^1 \frac{x^2}{e^x + 1} \, dx \leq \frac{1}{6}$

Ex 4. Etudier la monotonie de la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \, dt$

Ex 5. Montrer que : $\left| \int_0^2 x^2 \cos(x^2) \, dx \right| \leq \frac{8}{3}$

Ex 6. Montrer que : Pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $\left| \int_0^x \frac{t^n e^{-t}}{n!} \, dt \right| \leq \frac{e|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

Ex 7. Calculer les intégrales suivantes : (*En utilisant la parité de l'intégrande*).

$$\int_{-1}^1 e^{|x|} \, dx \qquad \int_{-2}^2 x^2 \, dx \qquad \int_{-1}^1 \sin(x) \, dx \qquad \int_{-2}^2 \frac{e^x - e^{-x}}{2} \, dx$$

Ex 8. Calculer les intégrales suivantes : (*On rappelle que la fonction $x \mapsto x - [x]$ est périodique de période 1*)

$$\int_0^3 e^{x-[x]} \, dx \qquad \int_0^{10} (x - [x])^2 \, dx \qquad \int_0^{8\pi} \sin^3(x) \cos^3(x) \, dx$$

Ex 9. Donner une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

$$x \mapsto \cos(2x) \text{ sur } \mathbb{R}. \qquad x \mapsto \frac{1}{x^3} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

Ex 10. Justifier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \int_0^x t^2 e^{-t} \, dt \qquad g : t \mapsto \int_2^t \sin^2(x) \, dx$$

Ex 11. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \int_0^x t^2 e^{-t} \, dt \qquad g : t \mapsto \int_2^t \sin^2(x) \, dx \qquad h : x \mapsto e^x \int_0^x t^3 e^{-t} \, dt$$

Ex 12. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x^5 \, dx \qquad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \qquad \int_0^2 e^{-2x} \, dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx$$

Ex 13. Calculer les intégrales suivantes. (*intégrations par parties*)

$$\int_0^1 x e^{-x} \, dx \qquad \int_1^2 x^2 \ln(x) \, dx \qquad \int_0^1 \arctan(x) \, dx$$

Ex 14. Calculer les intégrales suivantes. (*En faisant les changements de variable : $t = x^2$, $x = \ln(t)$ puis $x = \sin(\theta)$*)

$$\int_1^4 e^{\sqrt{t}} \, dt \qquad \int_e^{e^2} \frac{\ln(t)}{t + t \ln(t)} \, dt \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

Ex 15. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère l'intégrale : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(\theta) d\theta$

- 1) Montrer que (I_n) est convergente.
- 2) Calculer I_0 , I_1 et $I_n + I_{n-2}$ ($n \geq 2$).
- 3) En déduire la limite de (I_n) .
- 4) Calculer pour $p \in \mathbb{N}^*$, I_{2p} et I_{2p+1} sous la forme de somme.
- 5) (*Après le cours sur les séries*)

En déduire que les séries : $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ convergent et donner leur somme.

- 6) (*Avant le cours sur les séries*)

En déduire que les suites : $\left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et déterminer leur limite.

Ex 16. 1) On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$

On pourra déterminer a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$

- 2) Calculer de même : $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$

Ex 17. On donne a et b deux réels strictement positifs.

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{na + kb}$.

Ex 18. Calculer la limite de la suite (b_n) où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Ex 19. 1) Soit $P(X) = X^4 + 1$. Montrer que : $P(X) = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$

Pour la suite on admettra l'identité : $\frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right)$

- 2) Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx$$

Indication : on utilisera un changement de variable.

- 3) En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(3 - 2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = x\sqrt{2} - 1$ ainsi que la formule valable pour tout réel positif :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ex 20. (G2E 2024) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$

- 1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < W_{n+1} < W_n.$$

- 2) Par intégration par parties, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

- 3) À l'aide d'une démonstration par récurrence, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$$

- 4) En utilisant 1) et 2), démontrer que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{n-1}$ et en déduire que :

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$