Fiche de révision : Intégrales de fonctions continues sur un segment

Définition

Pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

est l'aire algébrique "sous" la courbe $C_f : y = f(x)$.

Sommes de Riemann

Définition.

$$G_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Théorème.

Si f est continue sur $[a, b]$

alors la suite (G_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Méthode des rectangles

```
a, b, n = 0, 2, 1000
S = 0
for k in range(n):
    x = a + k*(b-a)/n
    S += f(x)
print(S*(b-a)/n)
```

Propriétés

Générales à toutes les intégrales :

- Linéarité : $\int_a^b(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
- Changement de bornes : $\int_a^b f = -\int_b^a f$.
- Relation de Chasles : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

avec $a \leq b$

- Monotonie : Si $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- Positivité : Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \geq 0$.

Spécifique au fonction **continue**.

- Stricte positivité :
  si $a < b$, $f \geq 0$ et $f \neq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f > 0$.

Théorème fondamental

Théorème. (pour $a \in I$)

si f est continue sur I

alors $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.

(La primitive de f qui s'annule en a)

Conséquence.

Si $F' = f$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ (noté $\big[F(x)\big]_a^b$).

Formules de calcul

- Changement de variable : si $u = \varphi(x)$, $\varphi \in C^1([a, b])$:
$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$
- Intégration par parties : Pour u et v dans $C^1([a, b])$
$$\int_a^b u\,v' = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'\,v.$$

Intégrales et valeur absolue

- Inégalité triangulaire. (avec $a < b$)
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$
- Majoration.
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\,|b-a|$$

Valeur moyenne

Pour f continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Parité et périodicité

Si f est **paire** et si $[-a, a] \subset D$ alors

$$\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$$

Si f est **impaire** et si $[-a, a] \subset D$ alors

$$\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$$

Si f est **périodique** de période T alors pour tout a,

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt = \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\,dt$$

Exemples

$$\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k(b-a)$$

$$\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq 1)$$

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x = e^b - e^a$$