Feuille_Act_2 : Coefficients binomiaux et formule du binôme.

Ex 1 : 1) Soit $j \in [\![0,p]\!]$,

$$\begin{aligned}\binom{p+1}{j+1}\cdot\frac{1}{p+1} &= \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p-j)!}\cdot\frac{1}{p+1}\\ &= \frac{(p+1)\cdot p!}{(j+1)\cdot j!\ (p-j)!}\cdot\frac{1}{p+1}\\ &= \frac{1}{j+1}\cdot\binom{p}{j}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } j \in [\![0,p]\!],\quad \binom{p}{j}\cdot\frac{1}{j+1} = \binom{p+1}{j+1}\cdot\frac{1}{p+1}}$$

2) Soit $j \in [\![0,p-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\binom{p}{j+1}+\binom{p}{j} &= \frac{p!}{(j+1)!\ (p-j-1)!}+\frac{p!}{j!\ (p-j)!}\\ &= \frac{p!\ (p-j)}{(j+1)!\ (p-j)!}+\frac{p!\ (j+1)}{(j+1)!\ (p-j)!}\\ &= \frac{p!\ (p+1)}{(j+1)!\ (p-j)!}\\ &= \binom{p+1}{j+1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } j \in [\![0,p-1]\!],\quad \binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1}+\binom{p}{j}}$$

Ex 2 : La ligne du triangle Pascal donnant les $\binom{4}{k}$ est : $1, 4, 6, 4, 1$ donc

$$\boxed{(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4}$$

La ligne du triangle Pascal donnant les $\binom{6}{k}$ est : $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$ donc

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

et en remplaçant b par $-b$ on obtient :

$$\boxed{(a-b)^6 = a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6}$$

La ligne du triangle Pascal donnant les $\binom{3}{k}$ est : $1, 3, 3, 1$ donc

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$$

et en remplaçant x par $-x$ on obtient :

$$\boxed{(1-x)^3 = 1-3x+3x^2-x^3}$$

La ligne du triangle Pascal donnant les $\binom{7}{k}$ est : $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$ donc

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

et en remplaçant a par x et b par -1 on obtient :

$$\boxed{(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1}$$

La ligne du triangle Pascal donnant les $\binom{5}{k}$ est : $1, 5, 10, 10, 5, 1$ donc

$$(x+2)^5 = x^5 + 5\,x^4 \times 2 + 10\,x^3 \times 2^2 + 10\,x^2 \times 2^3 + 5\,x \times 2^4 + 2^5$$

$$\boxed{(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32}$$

La ligne du triangle Pascal donnant les $\binom{3}{k}$ est : $1, 3, 3, 1$ donc

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

et en remplaçant a par $2x$ et b par 1 on obtient :

$$\boxed{(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}$$

Ex 3 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k - \binom{n}{0} 3^0 = (1+3)^n - 1$

$$\text{donc } \boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 4^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4)^k = (1-4)^n$$

$$\text{donc } \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 4^k = (-3)^n}$$

Vues en classe, juste les réponses.

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1 \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Ex 4 : Pour n un entier naturel n :

- La formule du binôme donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$
- La formule du binôme donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n$ or $0^n = \mathbb{1}_{n=0}$

$$\text{donc } \boxed{\text{si } n=0,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 1 \quad \text{et} \quad \text{si } n \geqslant 1,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0}$$

- $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= 0+\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\\ &= n(1+1)^{n-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}}$$

- $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)\\ &= \binom{n+1}{p+1}-\binom{0}{p+1} \qquad \textit{(Somme telescopique)}\end{aligned}$$

or $\displaystyle\binom{0}{p+1}=0$ donc $\displaystyle\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}}$

Ex 5 : *(Non corrigé)*

Ex 6 : *(Non corrigé)*

Ex 7 : *(Non corrigé)*

Ex 8 : 1) On remarque que :

$$s_n+t_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n \qquad \text{et} \qquad s_n-t_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0 \qquad (\text{ car } n\geqslant 1\ )$$

Détaillons pour s_n-t_n :

$$\begin{aligned}s_n-t_n &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}-\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}\\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}(-1)^{2k}\binom{n}{2k}+\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}(-1)^{2k+1}\binom{n}{2k+1}\\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\\ &= 0^n\end{aligned}$$

2) le système $\begin{cases} s_n+t_n=2^n\\ s_n-t_n=0\end{cases}$ a pour solution $(2^{n-1},2^{n-1})$ qui permet de conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ \ s_n=2^{n-1} \ \text{ et } \ t_n=2^{n-1}}$$

Ex 9 : *(Non corrigé)*

Ex 10 : *(Non corrigé)*

Ex 11 : 1) La liste `L` contient des listes d'entiers.
Avant la boucle principale, elle contient la liste `[1]`
Après le premier tour de boucle, elle contient les listes `[1]` et `[1,1]`
Après le deuxième tour de boucle, elle contient les listes `[1]`, `[1,1]` et `[1,2,1]` ...
...

Au début de la boucle $i = k$, `L[-1]` est la liste $\left[\binom{k}{0}, \ \dots \ , \binom{k}{k}\right]$

donc `A` est la somme termes à termes des listes $\left[0, \binom{k}{0}, \ \dots \ , \binom{k}{k}\right]$ et $\left[\binom{k}{0}, \ \dots \ , \binom{k}{k}, 0\right]$

ce qui donne avec la formule de Pascal $\left[\binom{k+1}{0}, \ \dots \ , \binom{k+1}{k+1}\right]$

...

A la fin du programme,

$\boxed{\texttt{L} \text{ contient les 101 premières lignes du triangle de Pascal sous forme de listes}}$

2) *Principe du programme* : Pour chaque valeur de $n = 0, 1..., 20$ on calcule la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$ en utilisant les valeurs qui sont dans la liste `L`. La liste `L` ne contient pas les zéros du triangle de Pascal, il faut faire un test pour ne sommer que les termes non nuls.

```
for n in range(21):
    S = 0
     for k in range(n+1):
        if 0<=k and k <= n-k :
            S  = S + L[n-k][k]
    print('d_'+str(n)+' = ' +str(S))
```

On obtient le résultat suivant :

```
d_0 = 1
d_1 = 1
d_2 = 2
d_3 = 3
d_4 = 5
d_5 = 8
d_6 = 13
d_7 = 21
d_8 = 34
d_9 = 55
d_10 = 89
d_11 = 144
d_12 = 233
d_13 = 377
d_14 = 610
d_15 = 987
d_16 = 1597
d_17 = 2584
d_18 = 4181
d_19 = 6765
d_20 = 10946
```

3) $d_0 = \binom{0}{0} = 1$, $\quad d_1 = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1$, $\quad d_2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{0}{2} = 2$,

$d_3 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1} + \binom{1}{2} + \binom{0}{3} = 3$, $\quad d_4 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 5$

et $\quad d_5 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 8$

$\boxed{d_0 = 1 \ , \ d_1 = 1 \ , d_2 = 2 \ , \ d_3 = 3 \ , \ d_4 = 5 \text{ et } d_5 = 8}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
d_{n+1} + d_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n-(k-1)}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k-1} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n+1-k}{k} + \binom{n+1-k}{k-1} \right) \\
&= \binom{n+2}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2-k}{k} + \underbrace{\binom{0}{n+2}}_{=0} \\
&= \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k} \\
&= d_{n+2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+2} = d_{n+1} + d_n}$$

5) La suite (d_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficient constant, l'équation caractéristique associée a pour racine : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Les suites vérifiant cette relation sont donc les suites de la forme $\left(\alpha \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

On sait de plus que ces suites sont entièrement déterminées par la donnée des deux premiers termes, donc

(d_n) est l'unique suite de la forme $\left(\alpha \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ et vérifiant $d_0 = 1$ et $d_1 = 1$.

or la suite $(u_n) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$ est de de la forme $\left(\alpha \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ et vérifie $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)}$$

6) On sait que : $2 < \sqrt{5} < 3$ donc $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ et $-1 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$,

ce qui permet d'affirmer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = 0$ et ainsi :

$$\boxed{(d_n) \text{ diverge vers } +\infty}$$