

Définition et vocabulaire : (*Série convergente*)

Notation :

Les questions ne sont pas indépendantes, vous devez souvent utiliser les résultats des questions précédentes pour répondre. Ce sont des applications ou des démonstrations du cours, tout est à connaître.

Remarque aux 5/2 : on répondra aux questions sans chercher à se souvenir du cours sur les séries.

Ex 1 : *Des exemples pour comprendre cette définition.*

Quelle est la nature des séries suivantes ? (*Sont-elles convergentes ou divergentes ?*)

$$1) \sum_{n \geq 0} (-2)^{-n} \quad 2) \sum_{n \geq 0} n \quad 3) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \quad 4) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad 5) \sum_{n \geq 1} (-0.1)^n \quad 6) \sum_{n \geq 1} 2^n$$

Ex 2 : (*La nature ne dépend pas du premier indice*)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, et n_1, n_2 deux entiers naturels,

Montrer que : $\sum_{n \geq n_1} u_n$ converge si, et seulement si, $\sum_{n \geq n_2} u_n$ converge.

Ex 3 : (*Très mal maîtrisé*) (*Une condition nécessaire pour être convergente*)

Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Ex 4 : (*Ultra-classique*) (*Nature de la série harmonique*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. (*Indication :*)

Ex 5 : (*Ultra-classique*) (*Nature de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. (*Indication :*)

Définition : (*Somme d'une série convergente.*)

Notation :

Ex 6 : Des exemples pour comprendre cette définition.

Calculer, si elles existent, la somme des séries suivantes.

$$1) \sum_{n \geq 0} (-2)^{-n} \quad 2) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1} \right) \quad 3) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \quad 4) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Ex 7 : (Ultra-classique) (Somme des séries géométriques)

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge.

2) Déterminer lorsqu'elle converge la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

3) (Application de ce qu'on vient de démontrer)

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} (0,5)^n \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-0,1)^n$$

Ex 8 : (Classique) (Somme des séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \notin]-1; 1[$, quelle est la nature des séries $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)x^{n-2}$?

Dans la suite, x désigne un réel de $] -1; 1[$,

2) Quelle est la limite de la suite : (nx^n) ?

3) En notant $s_n = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$, montrer que pour $n \geq 1$, $(1-x)s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - nx^n$

4) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ converge et préciser sa somme.

5) Faire la même étude sur la série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)x^{n-2}$

6) Pourquoi parle-t-on de séries géométrique dérivées ?

7) **Application :**

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} \quad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) \frac{1}{4^n} \quad S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 3^{-n}$$

Ex 9 : (Plus difficile) (Somme des séries exponentielles)

1) Montrer, par récurrence sur n , que pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

2) Montrer que pour x fixé, la suite $\left(\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Indication : on pourra commencer par traiter le cas $x > 0$.

3) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et préciser sa somme.

4) **Application :**

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n!} \quad S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \quad S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}$$