Correction feuille_Act_3 : Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

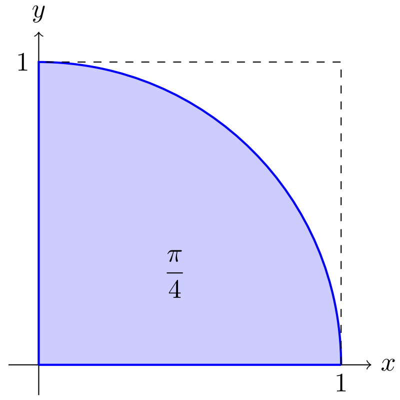
Ex 1. *A propos de* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ *voir le début du sujet G2E 2022.*

$x^2+y^2=1$ est une équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon 1

or $x^2+y^2=1$ et $y \geqslant 0$ équivaut à $y=\sqrt{1-x^2}$,

ainsi la courbe représentative de $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est un demi-cercle de centre O et de rayon 1.

$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ est (en u.a) l'aire sous cette courbe entre 0 et 1 :



L'aire du disque vaut π (u.a) donc :

$$\boxed{\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}}$$

Ex 2. $\displaystyle\int_1^0 x^2\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}$ et $\displaystyle\int_2^0 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^0 = -\frac{8}{3}$

Ex 3. Pour $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+e^x} \leqslant \dfrac{1}{2}$ *(En effet $0<2\leqslant 1+e^x$)* donc $0 \leqslant \dfrac{x^2}{1+e^x} \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

ce qui entraîne en intégrant sur $[0,1]$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x$

et en calculant il vient :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^2}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{6}}$$

Ex 4. *(non corrigé)*

Ex 5. *(Je ne fais pas exactement comme au tableau)*

L'inégalité triangulaire donne $\left|\displaystyle\int_0^2 x^2\cos(x^2)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \displaystyle\int_0^2 \left|x^2\cos(x^2)\right|\,\mathrm{d}x$

donc il suffit donc de montrer que $\displaystyle\int_0^2 \left|x^2\cos(x^2)\right|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{8}{3}$

On sait que $\forall x \in [0,2]$, $\left|x^2\cos(x^2)\right| \leqslant x^2$ donc *(croissance de l'intégration)* $\displaystyle\int_0^2 \left|x^2\cos(x^2)\right|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\left|\int_0^2 x^2\cos(x^2)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{8}{3}}$$

Ex 6. *(non corrigé)*

Ex 7. (juste les réponses)

$$\int_{-1}^1 e^{|x|}\,\mathrm{d}x = 2(e-1) \qquad \int_{-2}^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{16}{3} \qquad \int_{-1}^1 \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \int_{-2}^2 \frac{e^x-e^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = 0$$

Ex 8. *(On reverra plus tard l'intégrale des fonctions non continues, je ne corrige que la dernière question)*

$$\begin{aligned}\int_0^{8\pi} \sin^3(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= 4\int_0^{2\pi} \sin^3(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{(Intégrande } 2\pi\textit{−périodique)}\\ &= 4\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

et comme l'intégrande est impaire il vient :

$$\boxed{\int_0^{8\pi} \sin^3(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x = 0}$$

Ex 9. *(non corrigé)*

Ex 10. La fonction $t \longmapsto t^2e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ *(Produit de fonctions continues)*

donc *(Th. fondamental)* $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x t^2e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Remarque *(non demandé ici)* : Et pour tout $x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x^2e^{-x}$.

Ex 11. *(non corrigé)*

Ex 12. *(non corrigé)*

Ex 13. Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto -e^{-x}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc *(par parties)*

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[\ x\times\ (-e^{-x})\ \Big]_0^1 - \int_0^1 1\times\ (-e^{-x})\,\mathrm{d}x\\ &= -e^{-1} - \Big[\ e^{-x}\ \Big]_0^1\\ &= 1-2e^{-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1-2e^{-1}}$$

Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$ et $x \longmapsto \ln(x)$ sont de classe C^1 sur $[1,2]$ donc *(par parties)*

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[\ \frac{x^3}{3}\times\ \ln(x)\ \Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\Big[\ \frac{x^3}{3}\ \Big]_1^2\\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^2 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{3}}$$

Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \arctan(x)$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc *(par parties)*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[\ x\times\ \arctan(x)\ \Big]_0^1 - \int_0^1 x\times\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \arctan(1) - \Big[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\ \Big]_0^1\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}}$$

Ex 14. *(non corrigé)*

Ex 15. 1) *Ce qui a été fait au tableau :*

• Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}I_{n+1}-I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(\theta) - \tan^n(\theta)\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(\theta)\,(\tan(\theta)-1)\ d\theta\\ &\leqslant 0 \qquad \textit{car l'intégrande est négatif ou nul sur } [0,\pi/4]\end{aligned}$$

donc

$$(I_n) \text{ est décroissante.}$$

• De plus sur $[0, \pi/4]$, $\tan(\theta) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(\theta)\, d\theta \geqslant 0$

$$(I_n) \text{ est minorée par 0.}$$

Ce qui entraîne *(avec le théorème de convergence monotone)*

$$\boxed{(I_n) \text{ est convergente}}$$

Remarque *faite par des élèves en fin de cours.*
on peut rédiger autrement en remarquant que pour $\theta \in [0, \pi/4]$, $0 \leqslant \tan^{n+1}(\theta) \leqslant \tan^n(\theta)$

2) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, d\theta \boxed{= \frac{\pi}{4}}$, $\quad I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\, d\theta = -\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \boxed{I_1 = \frac{\ln(2)}{2}}$,

Pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} I_n + I_{n-2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(\theta) + \tan^{n-2}(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}(\theta)(\tan^2(\theta) + 1)\, \mathrm{d}\theta \\ &= \left[\frac{1}{n-1} \tan^{n-1}(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2, \quad I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}}$$

3) La première question a donné $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \ell \in \mathbb{R}$,

En passant à la limite sur l'égalité $I_n + I_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$ il vient $2\ell = 0$ et ainsi :

$$\boxed{(I_n) \text{ converge vers } 0}$$

4) • pour $k \in \mathbb{N}$, $I_{2k+2} + I_{2k} = \dfrac{1}{2k+1}$ *(d'après le résultat de 2))*
il vient : $(-1)^{k+1} I_{2k+2} - (-1)^k I_{2k} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$
puis en sommant pour k allant de 0 à $p-1$ il vient *(par telescopage)* :

$$(-1)^p I_{2p} - I_0 = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$$

or $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{1}{(-1)^p} = (-1)^p$ donc $\boxed{I_{2p} = (-1)^p\, \dfrac{\pi}{4} + (-1)^p \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}}$

• pour $k \in \mathbb{N}$, $I_{2k+3} + I_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+2}$ *(d'après le résultat de 2))*
il vient : $(-1)^{k+1} I_{2k+3} - (-1)^k I_{2k+1} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+2}$
puis en sommant pour k allant de 0 à $p-1$ il vient *(par telescopage)* :

$$(-1)^p I_{2p+1} - I_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

or $I_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et $\dfrac{1}{(-1)^p} = (-1)^p$ donc $\boxed{I_{2p+1} = (-1)^p\, \dfrac{\ln(2)}{2} + \dfrac{(-1)^p}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{k}}$

5) *(Après le cours sur les séries) (non corrigé)*

6) Les relations de la question 4) donnent les égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} - (-1)^p I_{2p} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) - (-1)^p I_{2p+1}$$

et comme on sait que (I_n) converge vers 0 il vient

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ln(2)}$$

Ex 16. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$, $\quad \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2} = \dfrac{ax+2a+bx-2b}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{(a+b)x+2(a-b)}{x^2-4}$

Donc Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$, $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}$ si, seulement si, $\begin{cases} a+b &= 0 \\ a-b &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$

donc $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}, \quad f(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{x-2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{x+2}}$

f est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale existe et

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{4} \times \frac{1}{x-2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln(3)}{4}}$$

Ex 17.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{na+kb} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a+b\frac{k}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \textit{avec } f : x \longmapsto \frac{1}{a+bx} \textit{ continue sur } [0,1] \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

or $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{a+bx}\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$

En conclusion : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{na+kb} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)}$

Ex 18. 1) *(Ce que nous avons fait en classe)*
La fonction $f : t \longmapsto \cos^{n+1}(t)$ est continue et sur $[0;\pi/2]$, $f \geqslant 0$ et $f \neq 0$ donc *(stricte positivité)*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t > 0 \qquad \text{ou encore} \qquad W_{n+1} > 0$$

La fonction $g : t \longmapsto \cos^n(t) - \cos^{n+1}(t) = \cos^n(t)\,(1-\cos(t))$ est continue
et sur $[0;\pi/2]$, $g \geqslant 0$ et $g \neq 0$ donc *(stricte positivité)*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) - \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t > 0 \qquad \text{ou encore} \qquad W_n - W_{n+1} > 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad 0 < W_{n+1} < W_n}$$

Une autre rédaction.

On utilise une conséquence de la stricte positivité de l'intégrale (rarement utilisée) :
Pour f et g continue sur $[a,b]$ tel que $a<b$,

$$\text{si} \qquad \forall t \in]a,b[, \quad f(t)<g(t) \qquad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$\forall t \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[,\ 0<\cos(t)<1$ donc $\forall t \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[,\ 0<\cos^{n+1}(t)<\cos^n(t)$

or toutes ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,\mathrm{d}t < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}, \quad 0<W_{n+1}<W_n}$$

2) On fixe $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x)\times\cos(x)\,dx \\ &= \Big[\cos^{n+1}(x)\times\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(-\sin(x))\cos^n(x)\times\sin(x)\,dx \end{aligned}$$

$x\mapsto\cos^{n+1}(x)$ *et* $x\mapsto\sin(x)$ *sont de classe* C^1 *sur* $[0;\frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= 0+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\times\sin^2(x)\,dx \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\times(1-\cos^2(x))\,dx \\ &= (n+1)(W_n-W_{n+2}) \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \quad W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}\,W_n}$$

3) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $nW_nW_{n-1}=\dfrac{\pi}{2}$.

- Pour $n=1$,

$$W_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,\mathrm{d}x=\Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1 \qquad \text{on a bien : } \quad 1\,.\,W_1.W_0=\frac{\pi}{2}.$$

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\quad n\,W_nW_{n-1}=\dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} (n+1)W_{n+1}W_n &= nW_{n-1}W_n && \textit{d'après 2.(b)} \\ &= \frac{\pi}{2} && \textit{avec l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

on obtient bien la relation au rang $n+1$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ nW_nW_{n-1}=\frac{\pi}{2}}$$

4) (W_n) est décroissante *(d'après 2.(a))* donc $W_n\leqslant W_{n-1}$ et $W_{n-1}\leqslant W_{n-2}$
et *(d'après 2.(b))* donnc $W_{n-2}=\dfrac{n}{n-1}W_n$ il vient :

$$W_n\leqslant W_{n-1}\leqslant\frac{n}{n-1}W_n \qquad \text{ou encore } \textit{(car } W_n>0\textit{)} \qquad 1\leqslant\frac{W_{n-1}}{W_n}\leqslant\frac{n}{n-1}$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure : $\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n-1}}$

$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n-1}$ donc $nW_nW_{n-1} \sim nW_n^2$ or (d'après 2.(c)) $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$

il vient : $nW_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$ et enfin comme $W_n \geqslant 0$ on peut en conclure :

$$\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$