Feuille_info_2 : Calculs approchés d'intégrales.

I. Subdivision régulière d'un intervalle.

Soient n un entier naturel non nul, a et b sont deux réels vérifiant $a < b$

on note : pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$ *(Une subdivision régulière du segment $[a,b]$).*

Remarques :

- La subdivision est la liste $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$,
- Elle est de longueur $n+1$.
- Elle permet de "découper" le segment $[a,b]$ en n segments $\big([x_{k-1}, x_k]\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$
- La suite finie $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est arithmétique de raison $\frac{b-a}{n}$ *(appelé pas de la subdivision)*

1) Exemple : Donner la subdivision régulière de $[0,2]$ en 5 segments. *(faire une illustration graphique).*

2) Ecrire une fonction Python `subdivision(a, b, n)` qui prend en entrée deux flottants `a` et `b` vérifiant `a<b` et un entier `n` et qui renvoie la subdivision de $[a,b]$ en n segments de même longueur *(sous la forme d'une liste).*

3) Comparer la fonction précédente avec ce que fait la fonction `linspace` de `numpy`

4) Que fait la fonction suivante :

```
import matplotlib.pyplot as plt
L_x = subdivision(-2, 2, 100)
L_y = [ x**3 for x in L_x ]
plt.plot(L_x, L_y)
plt.show()
```

5) Ecrire un programme du même type avec les possibilités des fonctions `numpy`.

– –

II. Méthode des rectangles.

On note (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\underbrace{S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)}_{\text{Somme de Riemann}} \qquad \text{ou encore} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{b-a}{n} f(x_k)}_{\text{Aires de rectangles}}$$

On sait que pour une fonction f continue sur $[a,b]$: la suite (S_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Illustration graphique :

❶ Ecrire une fonction `riemann(a, b, f, n)` prenant en entrée deux flottants a et b, une fonction f et un entier n et qui renvoie une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en utilisant la somme de Riemann.

❷ Vérifier la cohérence des résultats sur les exemples suivants :

$$\int_0^2 x^2\,dx \quad , \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad , \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\ .$$

III. Illustration graphique avec Python.

1) Qu'affiche le programme suivant : *(faire une illustration graphique).*

```
plt.fill( [x1, x1, x2, x2, x1],
          [0,  y , y , 0 , 0 ] ,  color = 'gray', alpha = 0.5)
plt.show()
```

2) En déduire une fonction `illustration(a, b, f, n):` qui trace les n rectangles associées à la somme S_n.

3) Vérifier que la fonction suivante illustre la méthode avec l'animation donnée sur cahier de prépa :

```
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return x**2

L_x = subdivision(-2, 2, 100)
L_y = [ f(x) for x in L_x ]
for n in range(3, 100, 3):
    plt.clf()
    plt.plot(L_x, L_y)
    illustration(-2, 2, f, n)
    plt.show()
    plt.pause(1)
```

4) Compléter le programme précédent pour qu'il affiche la valeur de S_n sur l'animation.

– –

IV. Majoration de l'erreur commise quand on applique la méthode des rectangles.

On suppose ici que la fonction f est de classe C^1 sur $[a, b]$, sa dérivée donc est bornée sur $[a, b]$ $\quad (a < b)$.

On pose $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \in [a, b],\ \ |f'(t)| \leqslant M.$

1) Montrer que pour α et β dans $[a, b]$:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = (\beta-\alpha)f(\alpha) + \int_\alpha^\beta (\beta - t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

2) En déduire que pour α et β dans $[a, b]$ vérifiant $\alpha < \beta$:

$$\left| \int_\alpha^\beta \big(f(t) - f(\alpha)\big)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant M\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$$

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_a^b f(t)\,dt - S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,dt$$

4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - S_n \right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{2n}$$

– –

V. D'autres méthodes.

$$\underbrace{T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}}_{\text{Méthode des trapèzes}} \qquad \underbrace{P_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)}_{\text{Méthode du point médian}}$$