Correction de la feuille-Cours 1 : Introduction au cours sur les séries numériques.

Ex 1 : 1) On note pour chaque n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-2)^{-k}$ *(la somme partielle associée à cette série)*

On a $$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-2)^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$$

donc $$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0} (-2)^{-n} \text{ est convergente}}$$

2) On note pour chaque n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ *(la somme partielle associée à cette série)*

On a $$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc $$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0} n \text{ est divergente}}$$

3) On note pour chaque n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ *(la somme partielle associée à cette série)*

On a $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc $$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ est convergente}}$$

4) On note pour chaque n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ *(la somme partielle associée à cette série)*

On reconnait une somme télescopique $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc $$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \text{ est convergente}}$$

5) *(non corrigé)*

6) *(non corrigé)*

Ex 2 : On suppose *(sans perte de généralité)* que $n_1 < n_2$

$$\forall n \geqslant n_2, \qquad \sum_{k=n_1}^{n} u_k \quad = \quad \underbrace{\sum_{k=n_1}^{n_2-1} u_k}_{\text{ne dépend pas de } n} \quad + \quad \sum_{k=n_2}^{n} u_k$$

donc les deux suites $\left(\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n} u_k\right)$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=n_2}^{n} u_k\right)$ convergent simultanément.

Autrement dit :

Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_1} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_2} u_n$ sont de même nature.

Ex 3 : On note pour chaque n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *(la somme partielle associée à cette série)*
on a supposé que la série converge, donc la suite (S_n) converge vers un réel que l'on note ℓ.

pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = S_n - S_{n-1}$, $\quad$ or $\quad (S_n)$ et (S_{n-1}) convergent vers ℓ $\qquad$ donc

$$\boxed{\text{Si la série } \sum u_n \text{ converge alors la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0}$$

Attention :

- Pour que la série $\sum u_n$ converge, il est nécessaire que (u_n) converge vers 0.

Ce qui donne en passant à la contraposée :

- Pour que la série $\sum u_n$ diverge, il suffit que (u_n) ne converge pas vers 0.

Ex 4 : Prenons un entier naturel k non nuls,

Plusieurs façons de montrer que : $\quad \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

❶ $\quad \forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$ $\qquad$ donc *(croissance de l'intégration)* $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$ donc

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

❷ On sait que : $\quad$ pour $x \geqslant 0$, $\quad \ln(1+x) \leqslant x$ $\quad$ donc $\quad \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$

or $\quad \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$ $\quad$ donc

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

❸ On sait que : $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $[k, k+1]$ $\quad$ *(Th. des accroissements finis)* $\quad f(k+1)-f(k) \leqslant f'(k)\times 1$
donc

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

or $\quad \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$

$$\text{donc} \qquad \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – –

En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n et en simplifiant (telescopage) il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ $\quad$ donc $\quad \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ diverge vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \text{ est divergente.}}$$

Remarque : C'est un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0.

Ex 5 : On note pour chaque n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}$ *(la somme partielle associée à cette série)*

1) Pour $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} &= \frac{1}{k^2-k} \\ &\geqslant \frac{1}{k^2} \qquad \text{car} \quad 0 < k^2 - k \leqslant k^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout entier } k \geqslant 2 \text{ , } \quad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$$

2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \qquad \text{d'après 1)} \\ &\leqslant 2 - \frac{1}{n} \qquad \text{(télescopage)} \\ &\leqslant 2 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (S_n) est majorée,

or la suite (S_n) est croissante (*En effet :* $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$) donc

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$$

Ex 6 : *(non corrigé)*

Ex 7 : 1) • Si $x \notin]-1,1[$ alors (x^n) ne tend pas vers 0 donc *(en appliquant le résultat de l'Ex.2)*

$$\sum_{n \geqslant 0} x^n \text{ diverge}$$

• Si $x \in]-1,1[$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} = 0$ donc

$$\sum_{n \geqslant 0} x^n \text{ converge}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} x^n \text{ converge si, et seulement si, } x \in]-1,1[}$$

2) Pour $x \in]-1;1[$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} = 0$ donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

3) Il suffit d'appliquer le résultat précédent et de faire attention au premier indice :

$$S_1 = \frac{1}{1-0{,}5} = 2 \qquad\qquad S_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2}$$

Ex 8 : 1) Si $x \notin]-1,1[$ alors (nx^n) et (n^2x^n) ne tendent pas vers 0 donc les séries divergent.

2) Ce sont des limites du cours *"croissances comparées pour les suites réelles"*, comme $x \in]-1;1[$,

$$\boxed{(nx^n) \text{ et } (n^2x^n) \text{ sont deux suites convergeant vers } 0}$$

3)

$$\begin{aligned}
(1-x)s_n &= (1-x)\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kx^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{n} kx^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} kx^k - \sum_{k=1}^{n} kx^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{(1-x)s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \ - nx^n}$$

4) $(1-x)s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \ - nx^n$ et comme $x \in]-1,1[$ on sait que : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1}{1-x}$ et $\lim_{n\to+\infty} nx^n = 0$

donc $\lim_{n\to+\infty} (1-x)s_n = \frac{1}{1-x}$ qui entraine $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{(1-x)^2}$

5) *(Pas fait en classe, demander à Nokomie ou à Melvin)*

6) *(Vu en cours)*

7)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k}{2^k} &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

La série converge et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} = -\frac{2}{9}}$$

Ex 9 : 1) Soit $x \in \mathbb{R}$, (on fixe un x)

Montrons, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \ + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \,\mathrm{d}t}_{\mathcal{P}(n)}$

- Pour $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} \ + \int_0^x e^t \,\mathrm{d}t = 1 - (e^x - 1) = e^x \qquad \text{donc } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $\mathcal{P}(n)$ est vraie,

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \ + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \ + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \,\mathrm{d}t \qquad \textit{(Intégration par parties)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \ + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

on a bien montré que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t}$$

2) • Pour $x \in \mathbb{R}_+$,

On a : $\forall t \in [0, x], \quad 0 \leqslant \dfrac{(x-t)^n}{n!} e^t \leqslant \dfrac{x^n}{n!} e^x$

donc $\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}}{n!} e^x$

or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = 0$

(Quand $0 \leqslant x < 1$ il n'y a pas d'indétermination et pour $x > 1$ c'est une croissance comparées)

donc

la suite $\left(\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

• Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$,

on a : $\left| \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t$

de plus $\quad \forall t \in [x, 0], \quad 0 \leqslant \dfrac{|x-t|^n}{n!} e^t \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!}$ donc $0 \leqslant \displaystyle\int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!}$

or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n!} = 0$ donc la suite $\left(\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

En conclusion,

$$\boxed{\text{Quel que soit le réel } x, \text{ la suite } \left(\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$,

on a, d'après 1), pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t$

or on a montré à la question 2) que $\left(\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 donc :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!} \text{ est convergente et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$$

4) *(Seulement les réponses)*

$$S_1 = e^{-1}, \quad S_2 = 2(e-1), \quad S_3 = e^3 \quad \text{et} \quad S_4 = \frac{e + e^{-1}}{2}$$