

Feuille Calcul 2 : Intégrales.

Ex 1 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 3e^{-t} dt, & I_2 &= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}} dt & I_3 &= \int_0^2 (A^5 - A) dA \\ I_4 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt, & I_5 &= \int_2^1 xe^{-x^2} dx & I_6 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t-1} dt \end{aligned}$$

Ex 2 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 te^{2t} dt & I_2 &= \int_1^2 x^2 \ln(x) dx & I_3 &= \int_0^1 t^2 e^{3t} dt. \\ I_4 &= \int_1^e \ln(x) dx & I_5 &= \int_0^1 \arctan(x) dx & I_6 &= \int_{-1}^1 \ln(1+x^2) dx \end{aligned}$$

Ex 3 : Calculer : $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx$

Ex 4 : 1) Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$.

On pourra effectuer le changement de variable $t = au$ dans l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{t^2 + a^2}$

2) Application : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 3} dt \quad I_2 = \int_{-1}^2 \frac{1}{2t^2 + 4} dt \quad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

Ex 5 : Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ des suites définies par :

$$\begin{aligned} 1) \quad u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} & 2) \quad u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} \sqrt{n^2 - k^2} & 3) \quad u_n &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ 4) \quad u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} & 5) \quad u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2} & 6) \quad u_n &= n \sqrt{\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2\right) \cdots \left(1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right)} \end{aligned}$$

Ex 6 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

$$1) \quad x \mapsto xe^{2x} \quad \text{sur } \mathbb{R} \quad 2) \quad x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \quad 3) \quad x \mapsto \frac{1}{1+e^x} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Ex 7 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} 1) \quad I_1 &= \int_{-1}^2 t\sqrt{4-t^2} dt & \text{avec le changement de variable } x &= 4-t^2 \\ 2) \quad I_2 &= \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx & \text{avec le changement de variable } u &= e^x. \\ 3) \quad I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x) dx & \text{avec le changement de variable } t &= \sin(x) \\ 4) \quad I_4 &= \int_0^1 \frac{\sqrt{2+x}}{1+x} dx & \text{avec le changement de variable } x &= t^2 - 2 \\ 5) \quad I_6 &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt & \text{avec le changement de variable } x &= e^t \end{aligned}$$

Ex 8 : Montrer à l'aide d'un changement de variable les relations suivantes :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx$$

2) Avec le changement de variable $t = \frac{1}{x}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, dt = - \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln(x)}{1+x^2} \, dx$$

En déduire la valeur de $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, dt$

Ex 9 : Calculer les intégrales suivantes (en commençant par un changement de variable affine) :

1) Calculer : $I_1 = \int_0^1 \frac{x+2}{4x+3} \, dx$

4) Calculer : $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\theta+1) \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \, d\theta$

2) Calculer : $I_2 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{3-x} \, dx$

5) Calculer : $I_5 = \int_0^2 \frac{x^3+4}{x+1} \, dx$

3) Calculer : $I_3 = \int_0^1 te^{-4t} \, dt$

6) Calculer : $I_6 = \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1} \, dx$

Ex 10 : Des extraits du cahier de calcul. Pour ceux qui veulent en faire plus.

1) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \, dt$ avec $t = \sin(\theta)$

6) $\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}} \, dt$ avec $u = \sqrt{t}$

2) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \, dt$ avec $u = \sqrt{t}$

7) $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{3+\cos^2(t)} \, dt$ avec $u = \cos(t)$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)} \, dt$ avec $u = \sin(t)$

8) $\int_0^1 \frac{1}{2+e^{-t}} \, dt$ avec $u = e^t$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \cos(t) \, dt$ avec $u = \sin(t)$

9) $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} \, dt$ avec $t = \tan(u)$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \cos^3(t) \, dt$ avec $u = \sin(t)$

10) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(t)}{t+t\ln^2(t)} \, dt$ avec $u = \ln(t)$

Dans les deux questions on prolonge le changement de variable par une intégration par parties.

11) $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} \, dt$ avec $u = \sqrt{t}$

12) $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}} \, dt$ avec $u = \sqrt{t}$

Dans ces dernières questions on demande une primitive de f en utilisant un changement de variable.

13) $f : x \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\sin(x) \cos^2(x)}$ avec $u = \tan(x)$

14) $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$

15) $f : x > 1 \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ avec $u = \sqrt{x^2-1}$