Feuille_calcul_1 : Séries numériques.

Soit q un nombre réel,

❶ La série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente si, et seulement si, $-1<q<1$; et alors $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$.

❷ La série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ est convergente si, et seulement si, $-1<q<1$;

et alors $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$.

❸ La série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ est convergente si, et seulement si, $-1<q<1$

et alors $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \dfrac{2}{(1-q)^3}$.

Quel que soit le nombre réel x,

La série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!} = e^x$

Ex 1 : Calculer les sommes des séries suivantes *(après avoir montré qu'elles existent)* :

1) $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!}$ 2) $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ 3) $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{n}{2^n}$ 4) $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{3n(n-1)}{4^n}$

5) $\sum_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1}\right)$ 6) $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n\,2^n}{(n+1)!}$ 7) $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^2\,2^n}{3^n}$ 8) $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(n^2+1)}{5^n}$

Ex 2 : 1) Justifier l'existence des sommes suivantes :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \qquad \text{et} \qquad I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$$

2) Montrer que $P + I = e$ et déterminer la valeur de $P - I$.

3) En déduire la valeur de I et P.

4) En s'inspirant des questions précédentes calculer :

1) $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{4^k}{(2k)!}$ 2) $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{3^k}{(2k+1)!}$ 3) $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{9^k}{(2k-1)!}$

Ex 3 : Calculer les sommes suivantes *(après avoir montré qu'elles existent)* :

1) $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{2^k}{3^k}$ 2) $\sum_{k=1}^{+\infty} (k^2+k)\dfrac{2^k}{k!}$ 3) $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{k}{2^{2k}}$ 4) $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$ 5) $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$ 6) $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(\ln(2))^k}{k!}$

Soit λ un réel quelconque,

7) $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(k+2)\lambda^k}{k!}$ 8) $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{(k+1)!}$ 9) $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k^2\lambda^k}{k!}$

Ex 4 : Déterminer (si elle existe) la limite des suites suivantes :

1) (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} k3^{-k}$. 2) (v_n) définie par $v_n = \sum_{k=1}^{n} 2 \times \dfrac{3^k}{k!}$.

Ex 5 : Soit $q \in]-1,1[$, compléter rapidement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = \ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{k=m}^{+\infty} q^k = \ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{n=m}^{+\infty} q^{n-m} = \ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^k = \ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n = \ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^k = \ldots\ldots\ldots$$

Ex 6 : Soit $q \in]-1,1[$, déterminer une expression donnant les sommes suivantes.

$$1)\ \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^k \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)nq^{n-1} \qquad 3)\ \sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k+3}$$

Ex 7 : Soit $x \in \mathbb{R}$, compléter rapidement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = \ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{x^k}{(k-m)!} = \ldots\ldots\ldots$$

Ex 8 : Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer une expression donnant les sommes suivantes.

$$1)\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)x^k}{k!} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \times \frac{x^n}{n!} \qquad 3)\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{(k+3)!}$$