Correction de la feuille Calcul_2 : Intégrales.

Ex 1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 3\,e^{-t}\,dt \\ &= \left[\,-3\,e^{-t}\,\right]_0^1 \\ &= \left(-3\,e^{-1}\right) - \left(-3e^0\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 3 - \frac{3}{e}}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{\sqrt{t}}\,dt \\ &= \left[\,2\,e^{\sqrt{t}}\,\right]_1^2 \\ &= \left(2\,e^{\sqrt{2}}\right) - \left(2\,e^{\sqrt{1}}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_2 = 2\left(e^{\sqrt{2}} - e\right)}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^2 (A^5 - A)\,dA \\ &= \int_0^2 (x^5 - x)\,dx \\ &= \left[\,\frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2}\,\right]_0^2 \\ &= \left(\frac{2^6}{6} - \frac{2^2}{2}\right) - (0) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_3 = \frac{26}{3}}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &= \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\sqrt{\frac{3}{4}} + 1 \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{I_4 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_2^1 x e^{-x^2}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_2^1 \\ &= -\frac{1}{2}e^{-1} - \big(-\frac{1}{2}e^{-4}\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_5 = \frac{1}{2}\big(e^{-4} - e^{-1}\big)}$$

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t-1}\,dt \\ &= \Big[\ln(|t-1|)\Big]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_6 = -\ln(2)}$$

Ex 2 : *(Je commence par une rédaction lourde, pour apprendre, mais qui prend trop de temps sur une copie.)*

• Soient u et v telles que, pour $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} u(t) &= t, & u'(t) &= 1 \\ v'(t) &= e^{2t}, & v(t) &= \frac{1}{2}\,e^{2t} \end{aligned}$$

elles sont de classes C^1 sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 u(t)\,v'(t)\,dt = \Big[u(t)\ \ v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u'(t)\,v(t)\,dt$

ce qui donne :

$$\int_0^1 t\,e^{2t}\,dt = \left[\,t\ \frac{e^{2t}}{2}\,\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2t}\,dt$$

puis on finit le calcul :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\,e^{2t}\,dt &= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\Big[\frac{e^{2t}}{2}\Big]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\Big) \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\int_0^1 t\,e^{2t}\,dt = \frac{e^2+1}{4}}$$

• Les fonctions $x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$ sont de classe C^1 sur $[1,2]$ donc *(par parties)* :

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2\ln(x)\,dx &= \Big[\ln(x)\times\frac{x^3}{3}\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\times\frac{x^3}{3}\,dx \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_1^2 \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^2 x^2\ln(x)\,dx = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}}$$

• Pour calculer I_3 on fait deux intégrations par parties,
les fonctions sont toutes de classe C^1 sur le segment $[0,1]$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2\,e^{3t}\,dt &= \Big[t^2\,\frac{e^{3t}}{3}\Big]_0^1 - \int_0^1 2\,t\,\frac{e^{3t}}{3}\,dt \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 t\,e^{3t}\,dt \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\Big[t\,\frac{e^{3t}}{3}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{3t}}{3}\,dt\right) \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\Big[\frac{e^{3t}}{3}\Big]_0^1\right) \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 t\,e^{2t}\,dt = \frac{5e^3-2}{27}}$$

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln(x)\,dx &= \int_1^e \ln(x)\times 1\;dx \\ &= \Big[\ln(x)\times x\Big]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\times x\;dx \qquad x\mapsto\ln(x) \text{ et } x\mapsto x\ \in C^1([1,e]) \\ &= e-(e-1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^e \ln(x)\,dx = 1}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arctan(x)\,dx &= \int_0^1 \arctan(x)\times 1\;dx \\
&= \Big[\arctan(x)\times x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\times x\;dx \qquad x\mapsto \frac{1}{1+x^2} \text{ et } x\mapsto x\ \in C^1([0,1]) \\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\;dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \Big[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 \arctan(x)\,dx = \frac{\pi - 2\ln(2)}{4}}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \ln(1+x^2)\,dx &= 2\int_0^1 1\cdot\ln(1+x^2)\,dx \qquad \text{car } x\mapsto \ln(1+x^2) \text{ est paire} \\
&= 2\left(\Big[x\cdot\ln(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\;dx\right) \qquad x\mapsto \ln(1+x^2) \text{ et } x\mapsto x\ \in C^1([0,1]) \\
&= 2\ln(2) - 4\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\;dx \\
&= 2\ln(2) - 4\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\;dx \\
&= 2\ln(2) - 4 + 4\arctan(1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-1}^1 \ln(1+x^2)\,dx = 2\ln(2) - 4 + \pi}$$

Ex 3 : *(non corrigé)*

Ex 4 : 1) 1er cas $a=0$: $\boxed{x\longmapsto -\frac{1}{x} \text{ est une primitive de } x\mapsto \frac{1}{x^2}}$

2ième cas $a\neq 0$:
Soit x un réel quelconque,
on fait le changement de variable affine $t=au$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{t^2+a^2}\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{x}{a}} \frac{1}{a^2u^2+a^2}\,a\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{x}{a}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)
\end{aligned}$$

2) *(non corrigé)*

Ex 5 : 1) Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\Big(\frac{k}{n}\Big) \qquad \text{en notant } f: x\longmapsto \frac{1}{x+1} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{car } f \text{ est continue sur } [0,1]
\end{aligned}$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rcll} u_n & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2} & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) & \text{en notant } f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2} \\ & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x & \text{car } f \text{ est continue sur } [0,1] \\ u_n & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \displaystyle\frac{\pi}{4} & \text{(aire du quart d'un disque)} \end{array}$$

3) *Rapidement :* On reconnaît une somme de Riemann (v_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,dx$

On fait deux intégration par parties les fonctions en jeu étant toutes de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x & = & \displaystyle\left[x^2\left(\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 2x\left(\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\right)\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\frac{-\cos(\pi)}{\pi} \quad + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\frac{1}{\pi} \quad + \frac{2}{\pi}\left(\left[x\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1\times\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right)\mathrm{d}x\right) \\ & = & \displaystyle\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left[\left(\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\right)\right]_0^1 \\ & = & \displaystyle\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi^3}\left(\cos(\pi)-\cos(0)\right) \\ & = & \displaystyle\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3} \end{array}$$

En conclusion :

$$\boxed{(v_n) \text{ converge vers } \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}}$$

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rcll} u_n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) & \text{en notant } f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2} \\ & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x & \text{car } f \text{ est continue sur } [0,1] \\ & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x & \\ u_n & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \displaystyle\frac{\pi}{4} & (\arctan(1)) \end{array}$$

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rcll} u_n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) & \text{en notant } f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^2} \\ & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x & \text{car } f \text{ est continue sur } [0,1] \\ & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \displaystyle\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 & \\ u_n & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \dfrac{1}{2} & \end{array}$$

6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

donc (comme $(u_n > 0)$)

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$$

(Somme de Riemann avec $f : x \longmapsto \ln(1+x^2)$ continue sur $[0,1]$)

donc (u_n) converge vers $\exp\left(\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx\right)$ *Continuité de la fonction exponentielle.*

Pour calculer cette intégrale, on fait une intégration par parties,

$x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \ln(x^2+1)$ sont C^1 sur $[0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1 1 \times \ln(1+x^2)\,dx & = & \displaystyle\Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\ & = & \displaystyle\ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx \\ & = & \displaystyle\ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ & = & \ln(2) - 2 + 2\arctan(1) \\ & = & \ln(2) - 2 + \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 2\,\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^2}}$$

La suite n'est pas corrigée.