Correction de la feuille_calcul_1 : Séries numériques.

Ex 1 : 1) La série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$ est convergente et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ est égale à e

2) *Comme nous l'avons fait au tableau :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{2^k}{3^{k+1}} &= \frac{2^2}{3^3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{9}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}=\frac{4}{9}}$$

3) *Une autre rédaction sur cet exemple.*

$\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2}\times k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ existe et vaut $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4$

(Série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\frac{1}{2}\in]-1;1[$ *)*

donc la série converge et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k}=2}$$

4)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{3k(k-1)}{4^k} &= \frac{3}{4^2}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4^2}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3}\end{aligned}$$

(Série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $\frac{1}{4}\in]-1;1[$ *)*

donc la série converge et sachant que $\frac{3}{4^2}\times\frac{2\times 4^3}{3^3}=\frac{8}{9}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{3k(k-1)}{4^k}=\frac{8}{9}}$$

5) *Les sommes partielles sont télescopiques :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}-\frac{2}{k+1}\right) &= 2-\frac{1}{n+1}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right) \text{ converge} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)=2}$

6)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k\,2^k}{(k+1)!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1-1)\,2^k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k!} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^2 - \frac{1}{2}(e^2-1) \\
&\textit{(Série exponentielle)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\,2^n}{(n+1)!} = \frac{e^2+1}{2}}$$

7) *Une rédaction qui montre que l'on a une combinaison linéaire de séries usuelles.*
On remarque que :

$$\frac{n^2 2^n}{3^n} = n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^2}{3^2} \times n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \frac{2}{3} \times n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

or le cours sur les séries géométriques dérivées donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{2}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3} = 2\times 3^3 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 3^2.$$

donc *(linéarité)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 2^n}{3^n}$ existe et vaut $\displaystyle\frac{2^2}{3^2} \times 2\times 3^3 + \frac{2}{3}\times 3^2 = 30$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 2^n}{3^n} = 30}$$

8) *Une rédaction qui montre que l'on a une combinaison linéaire de séries usuelles.*
On remarque que :

$$\frac{n^2+1}{5^n} = n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^n + n\left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{5^2}\times n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} + \frac{1}{5}\times n\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

or le cours sur les séries géométriques donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{2\times 5^3}{4^3} \ , \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5^2}{4^2}$$

et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{5}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{4}$.

Donc la somme existe et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{5^n} = \frac{1}{5^2}\times\frac{2\times 5^3}{4^3} + \frac{1}{5}\times\frac{5^2}{4^2} + \frac{1}{4} = \frac{10+20+16}{4^3} = \frac{23}{32}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{5^n} = \frac{23}{32}}$$

Ex 2 : 1) *(Résultat pour l'instant admis)*

2) On note : $\displaystyle P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}$ et $\displaystyle I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}$

- On sait d'après 1) que $(P_n + I_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P + I$
- pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle P_n + I_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!}$ et on sait que $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$ converge vers e *(série géométrique)*

donc $(P_n + I_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$

$$\boxed{P + I = e}$$

- On sait d'après 1) que $(P_n - I_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P - I$
- pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n - I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$ et on sait que $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$ converge vers e^{-1}

(série géométrique)

donc $(P_n - I_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$

$$\boxed{P - I = e^{-1}}$$

3) $\begin{cases} P + I = e \\ P - I = e^{-1} \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2P = e + e^{-1} \\ 2I = e - e^{-1} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} P = \dfrac{e + e^{-1}}{2} \\ I = \dfrac{e - e^{-1}}{2} \end{cases}}$$

4) *(non corrigé)*

La suite n'est pas rédigée.